

L2

Mécanique analytique et systèmes dynamiques

TD série 01: Principes variationnels

1 Plus petite distance dans un plan

Quelle est la courbe $y(x)$ qui minimise la distance entre deux points A et B dans un plan ?

2 Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, $1(x_1, y_2)$ et $2(x_2, y_2)$, et en la faisant tourner autour de l'axe y . Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale. Paramétriser la courbe selon $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$. Trouver la valeur de la surface.

3 Problème de la chaînette

Trouver la configuration d'un fil soumis à la pesanteur, de masse linéique ρ et de longueur L , fixé entre deux points $A(0, y_0)$ et $B(a, y_1)$. Résoudre ce problème en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

4 Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur un point matériel de masse m glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (x, y) . Si le point matériel est initialement immobile à l'origine O , trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $P(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications :

- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y .
- Choisir la paramétrisation $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$.
- Utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.
- Est-il possible que la forme idéale du rail passe par un point où $y > y_0$?

5 Géodésiques

Quelle est la courbe qui minimise la distance entre deux points A et B sur une sphère de rayon R ? sur une surface quelconque ?

6 Isopérimètre

Soient deux points A et B situés sur l'axe (Ox) . On veut trouver la nature de la courbe (C) décrite par une corde inextensible, de longueur donnée l , afin que l'aire intérieure obtenue, entre (C) et l'axe des abscisses, soit maximale.