<u>Analyse numérique (L2 / PA - STU)</u>

<u>Sujet d'exercice numéro 1</u>

Responsable : Christian Boily, MdC, Observatoire astronomique

Exo 1 : Relation de récurrence

Soit une suite numérique $\{u_i\}$, i = 0, 1, ... n, dont les termes sont données par la relation de récurrence

$$u_{i+1} = \ln|u_i + 1|$$

- Montrez à l'aide d'une calculette que la suite de termes est sensible à la précision du point de départ. Exemple: construisez la suite à partir de $u_0 = 2 > 0$ jusqu'à $n = 20$, puis reprenez en posant $u_0 = 2 + \varepsilon$ où $\varepsilon \neq 0$ mais demeure petit devant 2.

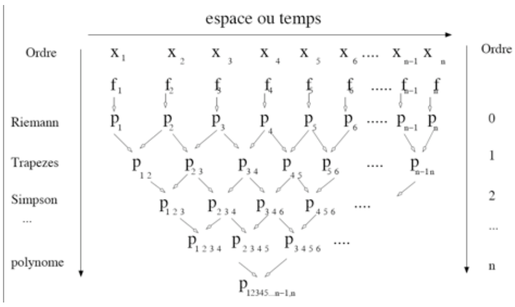
- A l'aide d'une analyse aux différences finies, démontrez qu'elle est la raison de cette sensibilité à la condition de départ.

- Montrez à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 2 que le point $u_i = 0$ est un attracteur pour le schéma proposé. Concluez.

- Généralisez votre analyse au cas de la relation $u_{i+1} = \ln|u_i + \beta|$. Existe-il une plage de valeurs de beta pour laquelle le schéma itératif est stable?

Exo 2 : Formule de Neville-Lagrange

En étudiant le schéma d'interpolation de Neville-Lagrange ci-dessous



et avec les définitions

$$\{x_i, f(x_i)\} \ \exists \ \forall \ i : [0, n]$$

$$l_i(x) \equiv \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ \forall \, i : [0, n]$$

(l'opérateur Pi signifiant la multiplication) montrez

- que le polynôme d'interpolation de Neville-Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

satisfait aux contraintes $p_n(x_i) = f(x_i) \ \forall \ i.$

- que ce polynôme se construit hiérarchiquement en interpolant entre des polynômes d'ordre *j-1* pour obtenir une séquence de polynômes d'ordre *j* jusqu'à n'obtenir qu'un seul polynôme d'ordre *j = n*.

- Montrez que les polynômes ainsi construits d'ordre j = 1 et 2 suivant

$$p_{23} = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} p_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_3} p_3 \ ; \ p_{12} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} p_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} p_2$$

$$p_{123} = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} p_{12} + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_3} p_{23}$$

satisfont bien aux contraintes au points *i = 1,2* et *i = 1,2 et 3*, respectivement.

Exo 3 : Exercices d'interpolation

Lancez un navigateur internet et rejoignez la page

http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/numex/Interpolf.html

Dans l'onglet «tableau d'entrées» insérer les points suivants: (x,y) =

(-0.73538, 0.01548), (-0.39692, 0.08075), (-0.14462, 0.45732), (0.16923, 0.38201), (0.50154,0.27155), (0.72308, 0.09079)

Familiarisez-vous avec les fonctions de l'application Java: choisissez les limites en x, y, portez en graphique. Il est utile de prensdre par exemple pour l'axe des x un intervalle symétrique par rapport à x = 0.

Allez sous «Méthodes». Comparez qualitativement les interpolations obtenues par ajustement linéaire, par celui de la méthode de Lagrange, puis par celui de «spline cubique».

Reprenez maintenant la définition de points dans un tableau d'entrées, et cherchez à reliez par interpolation les points (que vous définirez équidistant en *x*) satisfaisant la relation mathématique (courbe de Runge)

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Essayez d'obtenir un ajustement par les trois méthodes déjà vues. Y-a-t-il des différences importantes? Reprenez maintenant la définition graphique de la saisie de points (en utilisant le bouton de droite de la souris) et insérer un nouveau point, puis un deuxième, etc .. qu'observez-vous quant au comportement de l'ajustement par le polynôme de Lagrange? Est-ce la mêm situation pour les interpolations linéaires et cubique?