ULP Licence PA 2ième année : Cours d'Analyse Numérique

Printemps 2006 Resp.: Christian Boily

Examen d'évaluation final
Durée : 30 minutes

Appel mardi le 13 juin 2006 à 9h00
Salle informatique 211, UFR de physique

Les notes personnelles, soit les notes de cours, TD et TP, sont permises. Aucun livre de référence ou support électronique (engins de recherche tel **Google***, téléphone cellulaire, calculette, etc) n'est autorisé, à l'exception des dictionnaires de langues qui devront être déclarés au début de l'épreuve.*

Un maximum de 20 pts seront attribués.

Question de cours 1 : Mon ami Jacobi (10pts)

On consière le système d'équations linéaires suivant:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

(foncé signifie la notation matricielle) avec $\boldsymbol{A}$ la matrice de dimensions 2×2 suivante:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \theta \\ \theta & 3 \end{pmatrix},$$

$\theta \subseteq \mathbb{R}$ et l'on définit le vecteur $\boldsymbol{b}$ par

$$\boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} 3+\theta \\ 3+2\theta \end{pmatrix}.$$

On cherche à utiliser la méthode par itérations de Jacobi pour résoudre pour le vecteur inconnu $\boldsymbol{x}$. Pour cela il faut déterminer le domaine de convergence de la procédure en termes de θ.

1. Rappelez la construction de Jacobi. Montrez que la solution $\boldsymbol{x}$ s'exprime par un schéma itératif en décomposant la matrice $\boldsymbol{A}$ en sa partie diagonale et sa partie non-diagonale. (On les appellera $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{E}$, respectivement.)

2. Si la matrice est à diagonale dominante, quelle serait un choix logique pour estimer la solution $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}^{(0)}$? Le choix de $\boldsymbol{x}^{(0)}$ est-il alors contraint?

3. En exprimant $\boldsymbol{x}$ comme une procédure itérative

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)} + \delta\boldsymbol{x}^{(n-1)},$$

montrez que

$$\delta\boldsymbol{x}^{(n)} = (-1)^n \ \boldsymbol{E}^{n+1} \cdot \boldsymbol{b}/3 \ .$$

4. Deduisez-en que la norme de la correction $\delta\boldsymbol{x}$ est donnée par

$$\|\delta\boldsymbol{x}^{(n)}\| = \theta^{n+1}\,\|\boldsymbol{b}/3\| = \theta^{n+1}\left((1+\theta)^2 + (1+2\theta/3)^2\right)^{1/2}$$

   Quel est alors le domaine de valeurs possibles de θ assurant la convergence de la procédure itérative? Expliquez en quoi cela valide votre choix de départ $\boldsymbol{x}^{(0)}$ en (2).

   Rappel La norme d'un vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ est $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^\dagger} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ où $\boldsymbol{x}^\dagger$ est le conjugué de $\boldsymbol{x}$.

Exercice pratique 1 : intégration (10pts)

L'exercice suivant est un parmi ceux que nous avons effectués avec les applications Java développées par J. Köppen (Observatoire astronomique).

L'exercice proposé porte sur l'intégration de fonctions d'une variable, soit

$$g(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u\,.$$

Procédez comme suit:

- Assurez votre connexion à votre base de travail afin de lancer un navigateur internet (mozilla, netscape, ..) comme fait pendant le cours.
- Lorsque le navigateur est activé, rendez-vous au site

  http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/numex/Integf.html
- Dans l'onglet *f(x) = ...* choisissez

$$f(x) = 1/x$$

  Il s'agit de l'intégrant.
- Les bornes d'intégration iront de $a = -1$ jusqu'à $b = 1$ sauf indication contraire. Vous inserrerez ces valeurs dans le champ qui leur est approprié.

1. Quel est le résultat analytique attendu? Justifiez votre réponse par un argument mathématique.
2. Nous choisirons trois méthode d'intégration : Riemann (gauche), Riemann (droite) et les trapèzes. Laquelle parmi ces trois vous permettra d'obtenir le résultat le plus précis? Justifiez par un argument mathématique, puis donnez un exemple numérique en fixant le nombre de pas d'intégration (posons N = 101 par exemple) et en obtenant un résultat numérique pour chacune des méthodes. Les deux méthodes de Riemann bornent-elles le résultat attendu? Expliquez.

3. Rappelez ce que signifie la notion de 'convergence' en termes du nombre de pas d'intégration N. Ensuite en variant N, montrez (empiriquement) qu'aucune des méthodes porposées ne convergent vers le résultat attendu. ('Infinity' est un chiffre $> 10^{10}$ et qui ne peut être représenté.)

4. Démontrez alors, en joignant un schéma pour appuyer vos arguments, pourquoi les méthodes proposées ne convergent pas.

5. L'intégration en simple précision demande que les quantités numériques soient inférieures en magnitude à 10^{10}. Si l'utilisateur désire maintenir 5 chiffres significatifs tout au long de son calcul, quel est le plus grand nombre de pas d'intégration possible peut-il utiliser avec 1) La méthode de Riemann ; 2) les trapèzes. Justifiez votre réponse.

6. Comment procéder si l'utilisateur désire varier les bornes d'intégration avec $a < 0$, $b > 0$ et $|a| \neq |b|$?