TP n° 1

Oscillateurs mécaniques couplés

Le but de ce TP est d'étudier les régimes d'oscillation les plus simples de deux oscillateurs couplés. Ceux-ci se composent de deux pendules de torsion identiques, couplés par un fil de torsion. Ce système est l'analogue mécanique de circuits électriques oscillants couplés capacitivement.

1. Préparation

1.1. Appareillage

1.1.1. Oscillateurs

Deux tiges montées sur un socle forment le bâti de l'appareil (figure 1.1).

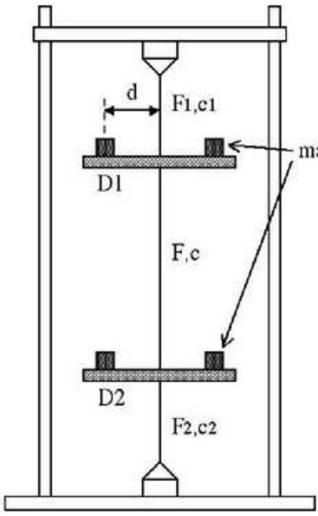

Fig. 1.1 Pendules de torsion couplés

Deux disques gradués D_1 et D_2 (identiques) forment l'équipage mobile du pendule. Ils sont fixés au bâti par des fils de torsion F_1 et F_2, de constante de torsion c_1 et c_2 (égales). Un troisième fil de torsion F de constante de torsion c les relie entre eux. Des trous pratiqués dans ces disques permettent d'y fixer des masselottes. Un petit levier articulé (en fer) monté sur chaque disque peut être soulevé et bloqué contre un électroaimant solidaire du bâti. Ce dispositif permet de conditionner la position angulaire initiale de chaque oscillateur. En coupant le courant dans l'électroaimant, le levier libéré retombe sur le disque dont la vitesse initiale est nulle. Un support de forme circulaire coulissant le long des colonnes du bâti permet de bloquer l'équipage mobile du pendule.

On donne :

- masse d'une masselotte : m = 179,4 g
- distance de l'axe de rotation du nième trou de fixation des masselottes :
  d_2 = 38 mm, d_3 = 53 mm, d_4 = 68 mm, d_5 = 83 mm, d_6 = 98 mm, d_7 = 113 mm

1.1.2. système d'acquisition

Des capteurs de mouvement ont été fixés sous chaque plateau. Les signaux de sortie de chaque capteur sont proportionnels à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ des disques. Ces tensions sont enregistrées (Cassy) puis transférées au logiciel Regressi.

<u>Branchement du capteur :</u> sur un petit boîtier noir d'où partent les câbles vers les capteurs, on trouve :

- les bornes d'alimentation (rouge et noire) des deux capteurs en parallèles, V_{cc} = 5 V. Le pôle positif est la borne rouge
- les bornes de sortie des deux capteurs (bornes verte : signal de sortie, borne noire : masse). Elles sont à raccorder aux calibres adéquats du module Cassy.
-

Vous trouverez des informations supplémentaires sur la table de TP.

L'utilisation du logiciel Regressi permet d'étudier la forme des oscillations. Il permet, en outre, une analyse de Fourier des signaux enregistrés. Cette approche est particulièrement intéressante dans le cas des battements.

1.2. Détermination des paramètres de chaque oscillateur

1.2.1. Mouvement sans masselotte

On s'intéresse tout d'abord aux propriétés de chacun des deux oscillateurs. Ceux-ci peuvent être étudiés séparément grâce au support circulaire coulissant bloquant. Il suffit de bloquer mécaniquement un des deux oscillateurs tandis que l'autre est laissé libre.

- A t = 0, on lâche l'oscillateur sans vitesse initiale d'un angle θ_0. Ecrire l'équation différentielle du mouvement pour le disque mobile (sans masselotte). On négligera les frottements. On notera I le moment d'inertie du disque et K la constante de torsion. On remarquera que K est la somme des deux constantes de torsion des fils situés de part et d'autre du disque : K = c_1 + c (ou K = c_2 + c).
- Montrer que la solution est de la forme : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$
- Exprimer la pulsation propre ω_0 et la période T_0 en fonction de I et de K.

1.2.2. Mouvement avec masselotte

On cherche à déterminer expérimentalement le moment d'inertie I et la constante de torsion K (*remarque : I ne peut pas être calculé directement car la géométrie des oscillateurs est plus compliquée que celle d'un simple disque*). Pour cela on va modifier le moment d'inertie des disques mobiles **de façon contrôlée** en leur rajoutant des petites masselottes cylindriques (de moment d'inertie connu).
Le moment d'inertie i_m d'une masselotte cylindrique, de rayon R et de masse m, est donné par rapport à son axe de symétrie par la relation : $i_m = \frac{m R^2}{2}$

- Déduire que le moment d'inertie I_m des deux masselottes se trouvant à une distance d de l'axe de rotation (l'axe de rotation étant parallèle à leur axe de symétrie) s'exprime sous la forme : $I_m = 2m\left(d^2 + \frac{R^2}{2}\right)$, on notera le moment d'inertie total de l'oscillateur $I_t = I + I_m$
- Donner pour l'oscillateur avec masselottes, l'expression de la pulsation ω_t et la période T_t en fonction de I_t et K, puis en fonction de I, I_m et K.

1.2.3. Détermination de I et de K

- Etablir le rapport T_t/T_0 et en déduire I en fonction de I_m, T_t et T_0. Montrer que le moment d'inertie I est donné par la relation : $I = \dfrac{I_m\ T_0^2}{T_t^2 - T_0^2}$

- Montrer que l'expression de K est alors égale à : $K = 4\,\pi^2\ \dfrac{I_m}{T_t^2 - T_0^2}$

On considérera dans cette étude que les deux oscillateurs sont identiques. Ceci sera vérifié dans la partie expérimentale.

1.3. Paramètres du système couplé

On rappelle que les deux oscillateurs sont supposés identiques :
$c_1 = c_2$, $K_1 = c_1 + c = c_2 + c = K_2 = K$. On considérera des oscillateurs sans masselottes.

1.3.1. Equations du mouvement

- Ecrire l'équation différentielle du mouvement pour chacun des deux disques en introduisant les angles de rotation θ_1 et θ_2 de D_1 et D_2 par rapport à leur position d'équilibre, la pulsation propre ω_0 de chacun des deux oscillateurs (lorsqu'ils oscillent seuls, l'autre étant maintenu immobile dans sa position d'équilibre), et le coefficient de couplage k = c/K. Vérifier que les équations du mouvement sont données par :

$$\ddot{\theta}_1 = -\,\omega_0^2\ \theta_1 + k\ \omega_0^2\ \theta_2$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\,\omega_0^2\ \theta_2 + k\ \omega_0^2\ \theta_1$$

Le coefficient de couplage k est relié aux propriétés du fil F (de constance de torsion c) qui relie les deux oscillateurs. En l'absence de couplage (sans fil F), k est égal à 0. Au contraire, si F est extrêmement rigide (fort diamètre, faible longueur), les deux disques sont fortement couplés, k devient proche de 1 : leurs mouvements sont quasiment identiques. Nous nous intéresserons dans ce TP à un cas intermédiaire.

- Résoudre les équations différentielles précédentes, en travaillant sur la somme et la différence de celles-ci. Déterminer la forme générale de $\theta_1(t) + \theta_2(t)$, puis la forme générale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$. Montrer qu'elles mettent en jeu deux pulsations particulières ω' et ω'' données par les relations : $\omega' = \omega_0\ \sqrt{1-k}$; $\omega'' = \omega_0\ \sqrt{1+k}$

- En combinant les résultats précédents, déduire la forme générale de $\theta_1(t)$ et de $\theta_2(t)$.

- A partir des expressions de $\theta_1(t)$ et de $\theta_2(t)$, trouver les solutions purement sinusoïdales (mode propres), et montrer qu'elles correspondent l'une à un régime d'oscillations symétriques de pulsation ω', et l'autre à un régime d'oscillations antisymétriques de pulsation ω''. On notera T' et T'' les périodes associées.

- Montrer que $\omega'^2 + \omega''^2 = 2\,\dfrac{K}{I}$ et $\omega'^2 - \omega''^2 = 2\,\dfrac{c}{I}$

- Montrer que la constante de couplage k est égale à $\dfrac{\omega''^2 - \omega'^2}{\omega''^2 + \omega'^2}$

  Ces relations seront à utiliser dans la partie mesure.

2. Mesures

Les capteurs installés sous chacun des disques donnent un signal directement proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Nous considérons dans ce TP que le signal mesuré correspond en fait au déplacement angulaire θ.

2.1. Détermination des paramètres I_1, I_2, K_1 et K_2 de chaque oscillateur sans masselotte.

On souhaite déterminer les moments d'inertie I_1 et I_2 ainsi que les constantes de torsion K_1 et K_2 de chaque oscillateur (sans masselotte) en utilisant la méthode décrite dans la préparation. Les masselottes devront être positionnées à une distance d = 53 mm de l'axe de rotation ($3^{ième}$ trou). On rappelle que la masse des masselottes est m = 179,4 g.

Mesurer au pied à coulisse, le rayon R des masselottes.

Calculer le moment d'inertie théorique I_m des deux masselottes.

Maintenir le disque D_2 (non utilisé) dans sa position d'équilibre en faisant coulisser le support circulaire vers le haut jusqu'au blocage mécanique. Mesurer les périodes d'oscillation (à l'aide d'un chronomètre) du disque D_1 avec et sans masselotte (T_t et T_0). Indiquer clairement la méthode de mesure.

En déduire le moment d'inertie I_1 et la constante de torsion K_1.

Recommencer en invertissant les deux disques, et déterminer I_2 et K_2.

Présenter les résultats sous forme de tableau.

Comparer les résultats obtenus.

Par la suite, on considérera les deux oscillateurs comme identiques (dans le cas d'une nette asymétrie, le signaler), avec un moment d'inertie $I = ½ (I_1 + I_2)$ et une constante de torsion également prise comme moyenne de K_1 et K_2.

Donner les valeurs de I et K.

Remarque : ces mesures pourront également être réalisées à l'aide de l'ordinateur en enregistrant les signaux et en en extrayant les périodes. Au choix des étudiants.

2.2. Paramètres du système couplé

La suite des mesures est à effectuer sans masselotte.

Enregistrer les signaux de sortie pour chacun des deux disques dans chacune des situations suivantes :

1. oscillations symétriques (T', ω') : en donnant aux deux disques des amplitudes initiales égales (environ 40°) à l'aide de l'électroaimant.

2. oscillations antisymétriques (T'', ω'') : en donnant aux deux disques des amplitudes initiales opposées (environ 30°).

Imprimer les courbes. Déterminer la période des oscillations à l'aide de la fonction réticule (détailler la procédure, et faites apparaître les points utilisés sur votre courbe).

Faire une analyse de Fourier du signal temporel (d'un des deux disques).

Commentaires.

Imprimer l'analyse de Fourier.

Déduire ω' et ω'' des mesures des périodes ou de l'analyse de Fourier.

Déterminer la constante de couplage k à partir des valeurs de ω' et ω''.

Déduire la constante de torsion c du fil F à partir des valeurs de ω' et ω''.

Déduire enfin la constante de torsion K de chacun des deux oscillateurs à partir des valeurs de ω' et ω''. Comparer avec la valeur de K obtenue dans la partie précédente.

2.3. Oscillations modulées, battements

Réaliser, grâce aux électroaimants, l'expérience suivante avec pour conditions initiales (sans masselottes) :

1. le disque D_2 est au repos dans sa position d'équilibre, le disque D_1 est écarté d'un angle θ_0 (environ 40°).
2. le système et ensuite abandonné sans vitesse initiale.

Décrire qualitativement les mouvements respectifs des deux oscillateurs.

Enregistrer les signaux de sortie pour chacun des deux disques.

Imprimer la courbe pour un des deux disques. Tracer sur celle-ci la ligne de base ainsi que l'enveloppe des oscillations (de façon à mettre en évidence les battements).

Déterminer les périodes T_i et T_m à l'aide de la fonction réticule. Faire apparaître les points utilisés sur la courbe imprimée. En déduire les valeurs de ω_i et ω_m.

Réaliser une analyse de Fourier du signal d'un des deux disques. Imprimer les courbes. Quelles fréquences caractéristiques apparaissent ? Comparer à l'analyse des modes propres. Commentaires. Déduire de l'analyse de Fourier, les valeurs de ω_i et ω_m. Comparer à la mesure directe.