Cours électronique

Chapitre 4: Fonctions de transfert Diagramme de Bode et filtres

1- Fonction de transfert

Soit une tension sinusoïdale $\tilde{U}_e = U_e.\cos(\omega t + \varphi_e)$

délivrée par une source d'entrée, d'amplitude Ue et de fréquence f=(ω/2π) variable et appliquée à un filtre (ou circuit de transmission).

On obtient à la sortie du filtre, aux bornes du circuit de réponse (ou de charge) une tension :

$$\tilde{U}_s = U_s.\cos(\omega t + \varphi_s)$$

Définition:
On appelle Fonction de transfert (ou transmittance) du circuit de transmission en régime sinusoïdal, la quantitée complexe :

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{\tilde{U}_s}{\tilde{U}_e}$$

La fonction de transfert est caractérisée par :

1) son module ou GAIN :

$$G(\omega) = \left\|\tilde{H}\right\| = \frac{U_s}{U_e}$$

2) son argument ou déphasage entre $\tilde{U}_s$ et $\tilde{U}_e$

$$\varphi(\omega) = Arg\tilde{H} = \varphi_s - \varphi_e$$

Si on suppose :

$$\tilde{U}_s = U_s.e^{j\varphi_s}$$

$$\tilde{U}_e = U_e.e^{j\varphi_e}$$

La fonction de transfert s'écrira :

$$\tilde{H}(j\omega) = G(\omega).e^{j\varphi(\omega)}$$

<u>2- Gain en tension :</u>

Le gain en tension $G(\omega)=U_s/U_e$ est exprimable fréquemment en décibels

On définit le gain d'un filtre en décibels (dB) par :

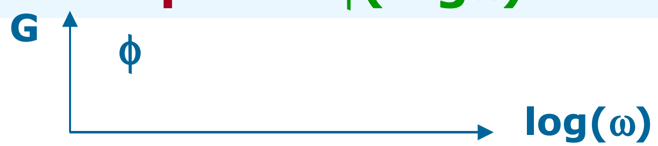
$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\tilde{H}(j\omega)\right| = 20\log_{10}G(\omega)$$

II-Diagramme de Bode:

On appelle diagramme de Bode, l'ensemble des courbes de réponse fréquentielle:

- **Courbe de gain $G_{dB}(\log\omega)$ en échelle logarithmique**

- **Courbe de phase $\phi(\log\omega)$ en échelle semi-logarithmique**

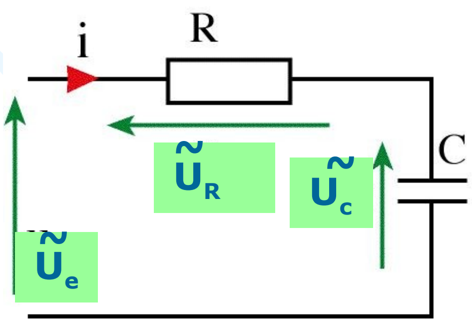


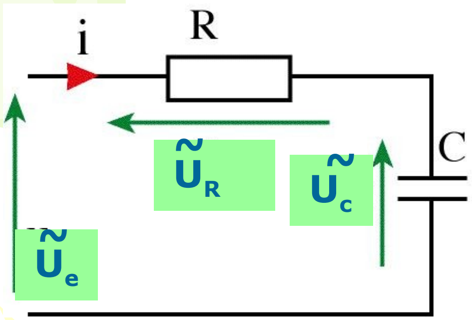
Exemple d'un filtre dont la fonction de transfert du 1er ordre s'écrit sous la forme :

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

ω en rd/s

Exemple : le filtre RC





$$\tilde{U}_s = \tilde{U}_e \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{jC\omega}\right)}{\left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}$$

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{U}_s}{\tilde{U}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$si \quad \mathrm{RC} = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{\tilde{U}_s}{\tilde{U}_e} = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Revenons au cas : $$\tilde{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

a) Courbe de gain :

Le gain en décibels est :

$$G_{dB} = 20 \log\left(\left|\frac{K}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right|\right)$$

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(K) - 20 \log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(K) - 10 \log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

- si ω tend vers zéro ($\omega << \omega_0$) on a :

G_{dB}=20 $\log_{10}$ K
Asymptote basse fréquence ➔ droite horizontale

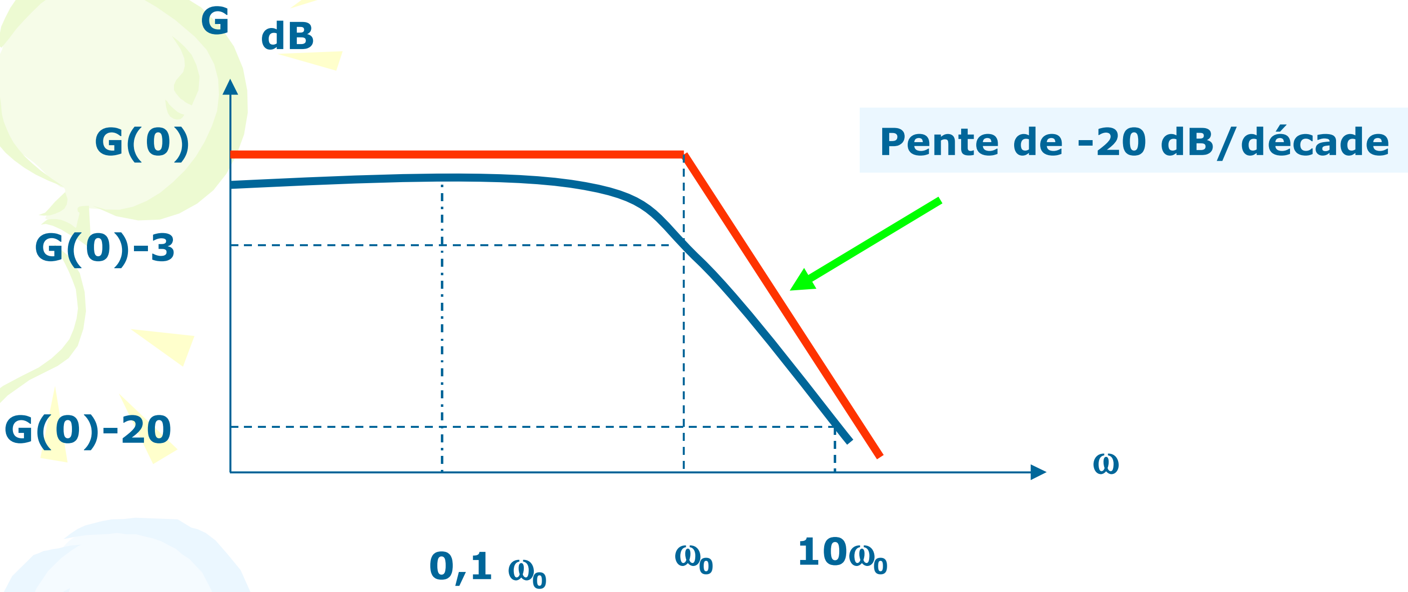
- si ω tend vers l'infini ($\omega >> \omega_0$) on a :

$$G_{dB} \cong 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

$$G_{dB} = -20(\log_{10}\omega) + 20\log_{10}\omega_0 + 20\log_{10}(K)$$

$$G_{dB} = -20X + 20\log(K.\omega_0)$$

L'asymptote Haute fréquence est une droite oblique de pente -20 dB/décade



Gain en décibels

Les deux asymptotes se coupent en $\omega=\omega_0$ (pulsation de coupure)

b) Courbes de phase :

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\varphi(\omega) = Arg(\tilde{H}) = Arg(-tg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right))$$

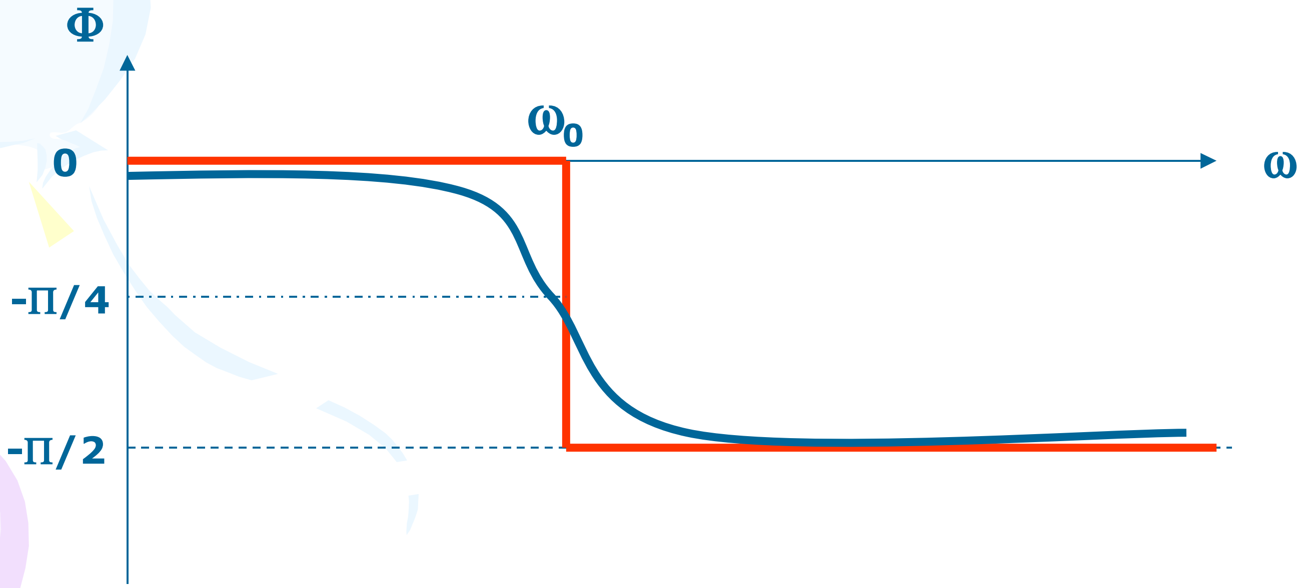
$$\varphi(\omega) = Arg(\tilde{H}) = Arg\left(-tg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

- Si ω tend vers zéro ➔ $\phi(\omega)$ tend vers zéro;

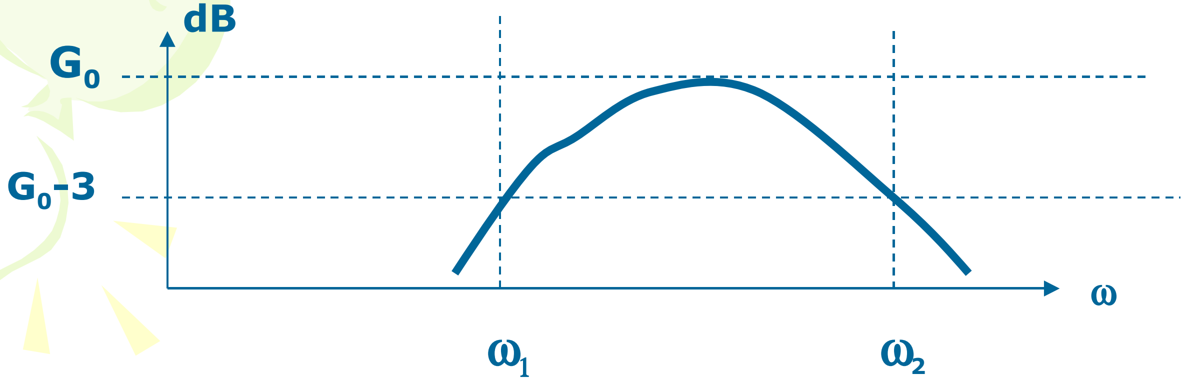
Asymptote basse fréquence horizontale $\phi(\omega)$ =0

- **Si ω tend vers l'infini ➔ $\phi(\omega)$ tend vers $-\pi/2$**

Asymptote haute fréquence horizontale $\phi(\omega)$ =-Π/2

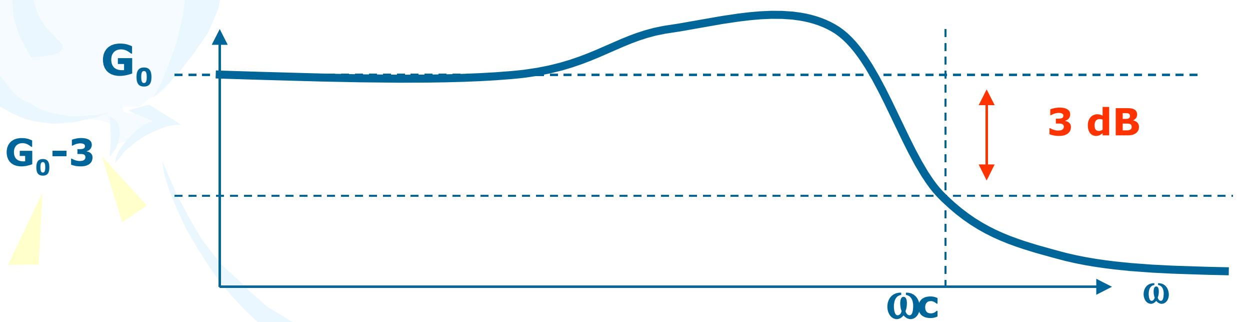


III- Bande passante et fréquence de coupure



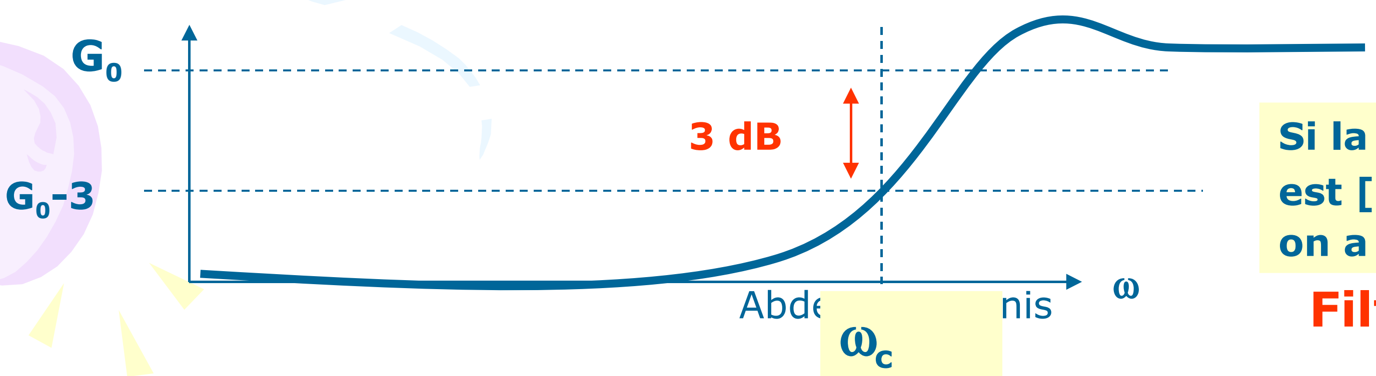
Si la bande passante est [ω_1, ω_2] on a un filtre passe bande

Filtre passe bande



Si la bande passante est [0, ω_C] on a un filtre passe bas

Filtre passe bas

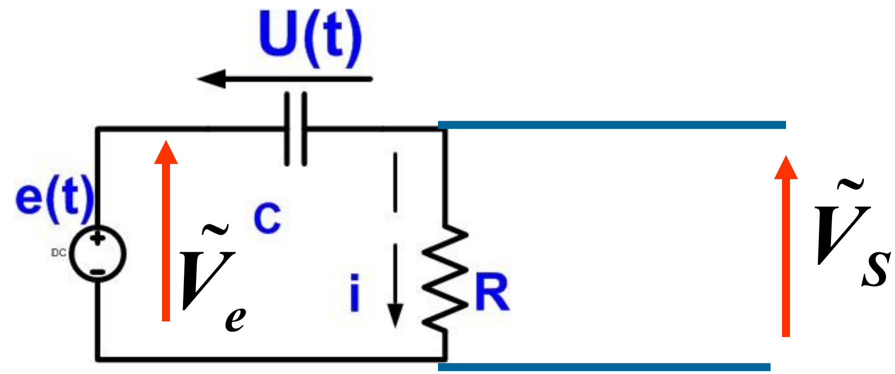


Si la bande passante est [ω_C, infini] on a un filtre passe haut

Filtre passe haut

IV : Applications:

1-Filtre passe-haut:



Pont diviseur :

$$\tilde{V}_s = \tilde{V}_e \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \tilde{V}_e \cdot \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$si \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

alors la fonction de transfert est :

$$\frac{\tilde{V}_s}{\tilde{V}_e} = \frac{j\left(\omega/\omega_c\right)}{1 + j\left(\omega/\omega_c\right)} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}$$

Remarque : x➔ 0 G=|V$_s$/V$_e$|= $G = \left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x->0} 0$

$x -> \infty \qquad G \xrightarrow{x->\infty} 1$

cas du Filtre passe haut

$x=\omega/\omega_c$

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{1}{1-\frac{j}{x}} ==> G = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$x << 1$$

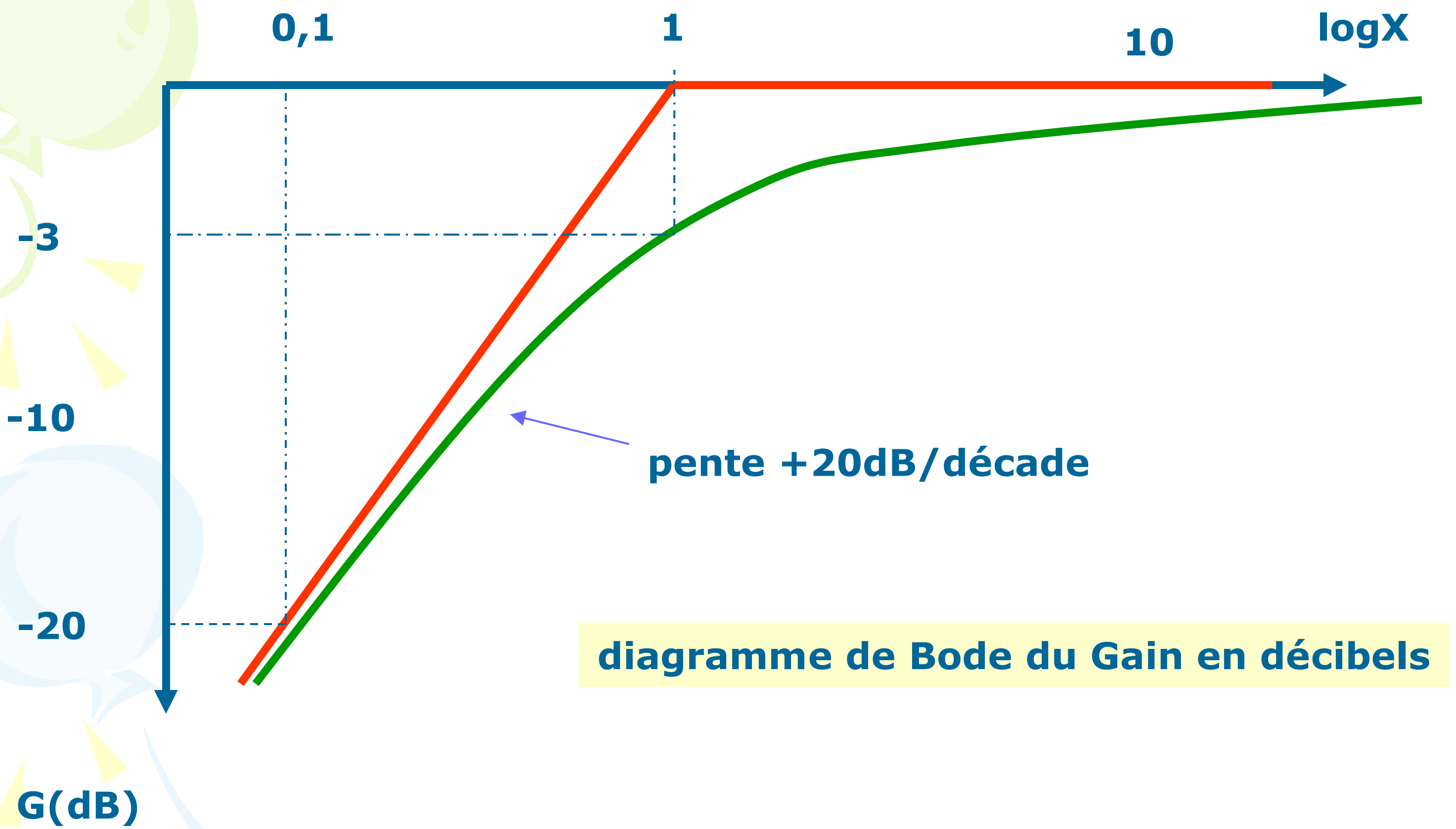
$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = x$$

$$x << 1 \qquad G(x) \xrightarrow[x<<1]{} x$$

$$cas \ : \ x >> 1$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1$$

$$x >> 1 \qquad G(x) \rightarrow 1$$


0,1
1
10
logX
-3
-10
-20
G(dB)
pente +20dB/décade
diagramme de Bode du Gain en décibels

Fréquence de coupure à -3dB:

La pulsation qui définit ω_c qui sépare le domaine passant du domaine atténué est défini par :

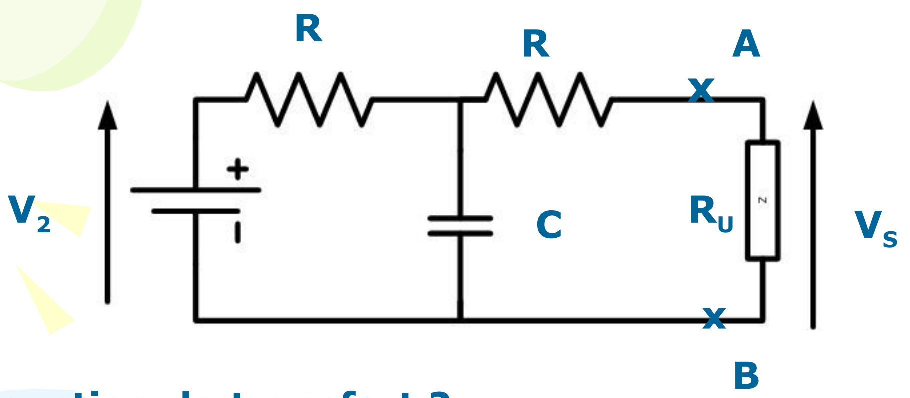
$$G(\omega_c) = \frac{G_0}{\sqrt{2}}$$

ou

$$G_{dB}(\omega_c) = (G_{0_{dB}} - 3)dB$$

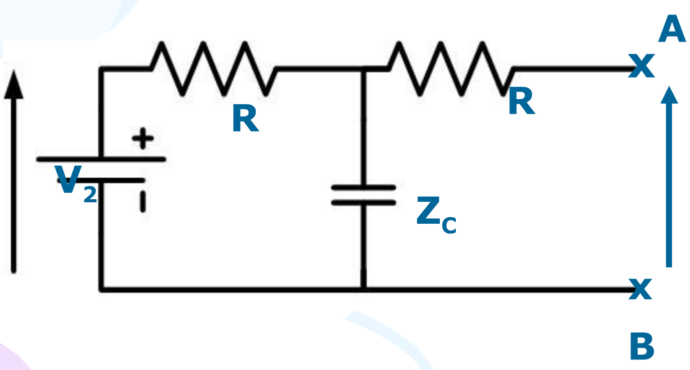
NB = 20 log(2)$^{1/2}$= 3

2-Exemple de filtre en T



Fonction de transfert ?

On applique le théorème de Thevenin entre les points A et B
On appellera Zc=1/jCω, impédance de la capacité



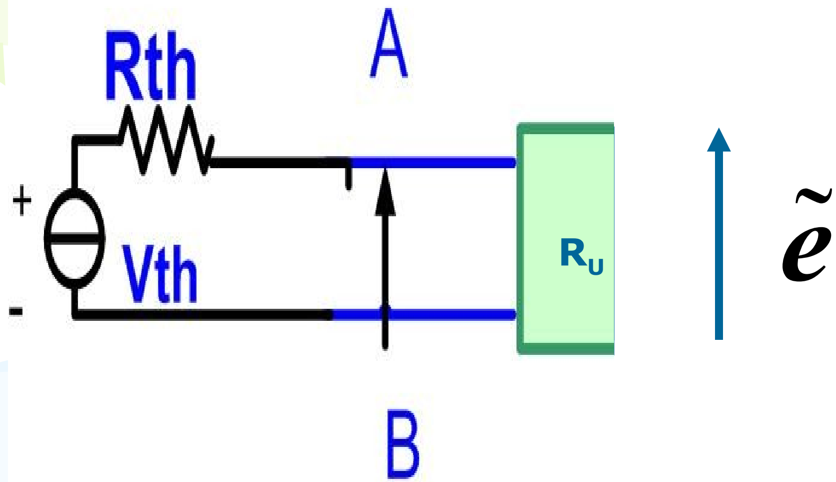
$$\tilde{E}_{th} = \tilde{V}_2 . \frac{Z_c}{Z_c + R}$$

$$R_{Th} = R + R // Z_c$$

$$R_{th} = R + \frac{R.Z_C}{R + Z_C} = \frac{R(R + Z_c) + RZ_c}{R + Z_c}$$

$$R_{th} = \frac{R(R + 2Z_c)}{R + Z_c}$$

Circuit Thevenin équivalent :



$$\tilde{e} = \left(\frac{R_u}{R_u + R_{th}} \right) . \tilde{E}_{th} \qquad (1)$$

avec

$$R_{th} = \frac{R(R + 2Z_c)}{R + Z_c} \qquad Z_c = 1/jC\omega$$

Fonction de Transfert : $H(j\omega) = \dfrac{sortie}{entrée} = \dfrac{\tilde{V}_s}{\tilde{V}_e}$

$$\tilde{e} = \frac{R_u}{(R_u + R_{th})} \left[\frac{Z_c}{Z_c + R} . \tilde{V}_2 \right]$$

en développant:

$$\tilde{e} = \frac{R_u Z_c}{R_u(Z_c + R) + R(R + 2Z_c)} . \tilde{V}_2$$

La fonction de transfert s'écrira :

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{\tilde{e}}{\tilde{V}_2} = \frac{R_u.Z_c}{R_u(Z_c + R) + R(R + 2Z_c)}$$

$$Z_C = {}^{1}\!/_{j\omega}$$

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{R_u.\,{}^{1}\!/_{jC\omega}}{R_u\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right) + R(R + \frac{2}{jC\omega})}$$

en simplifiant par 1/jCω

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{R_u}{(R_u + 2R) + jRC\omega\,(R + R_u)}$$

$$\left|\tilde{H}(j\omega)\right| = \frac{R_u}{\sqrt{(R_u + 2R)^2 + (RC\omega\,(R + R_u))^2}}$$

Filtre passe bas dont le gain maximum est obtenu enfaisant $\omega=0$

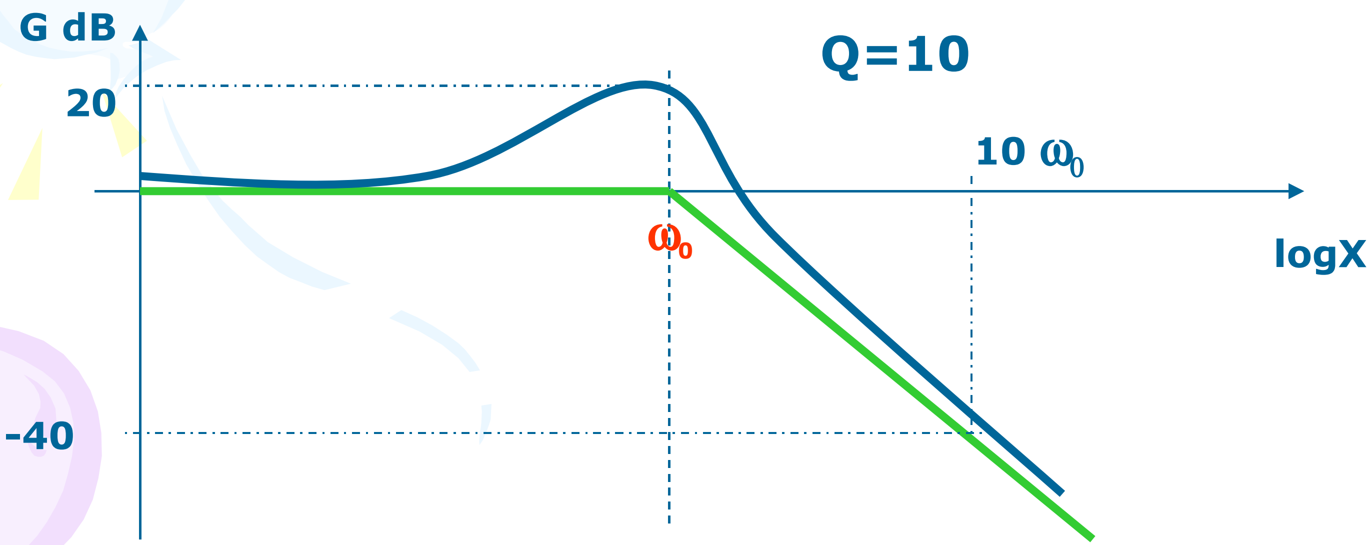
$$G_{\max} = \frac{R_u}{2R + R_u}$$

V-Fonction de transfert du 2ème ordre:

a) **Pour les systèmes du second ordre, la fonction de transfert contient des termes en ω^2. On trouve les fonctions fondamentales :**

$$\tilde{H}(j\omega) = A.\frac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2} \quad ; \; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Quand Q est grand ➔ apparition d'un phénomène de résonnance. Les courbes de gain s'écartent des asymptotes :
exemple :



b) Filtre passe bande à bande large:

Pour ces systèmes, la fonction de transfert peut s'écrire:

$$\tilde{H}(j\omega) = A.\frac{j\omega}{\left(\omega_m + j\omega\right)}.\frac{\omega_M}{\left(1 + j\omega\right)}$$

qu'on peut écrire:

$$\tilde{H}(j\omega) = A.\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_m}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_m}\right)}.\frac{1}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_M}\right)}$$

La fonction de transfert est le produit de trois fonctions :

- ➔**Le gain moyen A (Constant)**
- ➔**Un passe haut : coupure ω_m**
- ➔**Un passe bas : coupure ω_M**