Cours électronique

Chapitre 2: Circuits linéaires en régime sinusoïdal : Impédance complexe

Abdenour Lounis

I- Représentation d’une tension et d’une intensité en régime sinusoïdal:

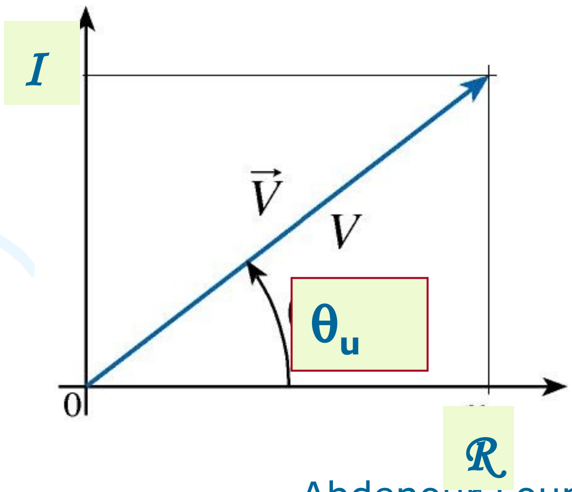
Si on applique à un dipôle électrocinétique la tension alternative de période T=2π/ω

$$V(t) = V_M.\cos(\omega\, t + \theta_u)$$

L’intensité qui le parcourt en régime permanent est :

$$i(t) = I_M.\cos(\omega\, t + \theta_i)$$

ω est la pulsation exprimée en radians par seconde



Module de V(t) et de I(t) :

$$V_M = V_{eff}.\sqrt{2}$$ V_{eff} **tension efficace**

$$I_M = I_{eff}.\sqrt{2}$$ I_{eff} **tension efficace**

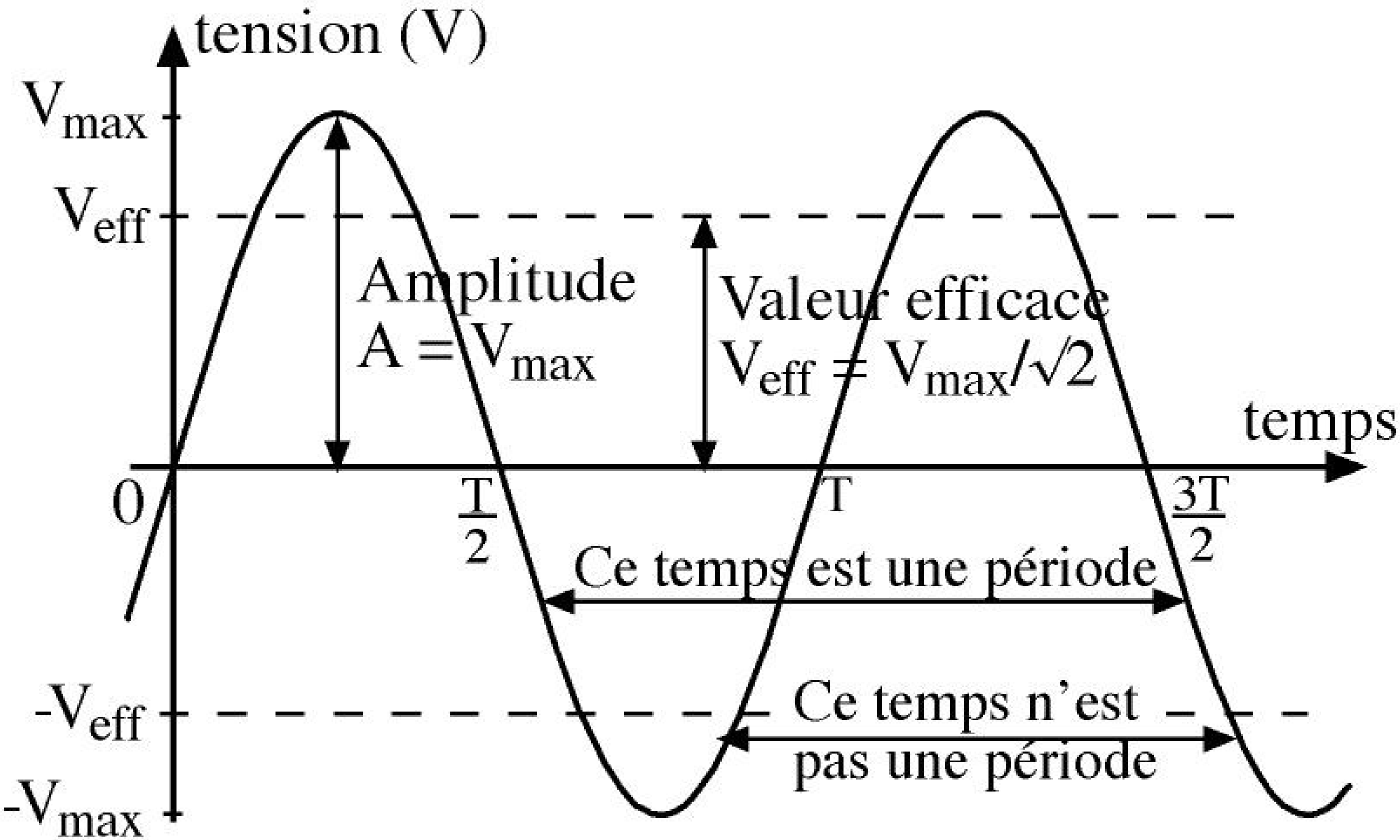
Dans le plan complexe, la tension et le courant complexe s'écrivent :

$$\tilde{V} = [V_M, \theta_U]$$

$$\tilde{I} = [I_M, \theta_i]$$

On notera $\theta = \theta_u - \theta_i$ **le retard de phase de l'intensité, qui traverse le dipôle, par rapport à la tension entre ses bornes**

Illustration:



II- Loi d'Ohm en notations complexes

En notation complexe, la loi d'Ohm appliquée à un dipôle passif s'écrit :

$$\tilde{U} = \tilde{Z}.\tilde{I}$$

$$\text{ou} \quad \tilde{I} = \tilde{Y}.\tilde{V}$$

$\tilde{Z}$ **impédance complexe du dipôle** $\quad \tilde{Y} = \dfrac{1}{\tilde{Z}}$ **Admittance complexe**

L'impédance complexe est définie par : $\tilde{Z} = \dfrac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$

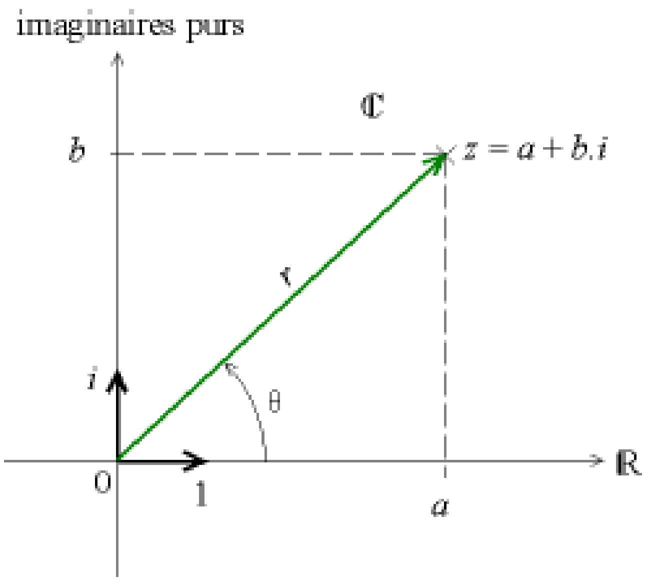
Remarque : différentes expressions d'un nombre complexe $\tilde{Z}$

de module ρ et d'argument θ :

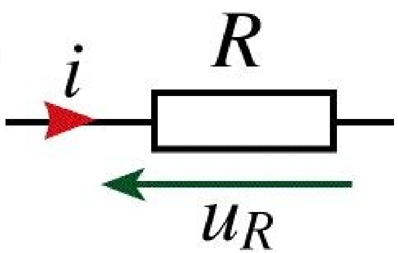
$$\tilde{Z} = [\rho, \theta] = \rho . e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\tilde{Z} = a + ib \qquad a = \rho\cos\theta \qquad b = \rho\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

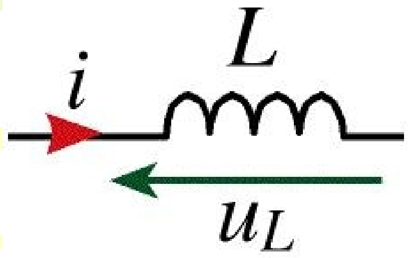


a) Dipôle purement résistif :



$$\begin{cases} \tilde{U}_R = [U_R, 0] \\ \tilde{I}_R = [I_R, 0] \\ \tilde{Z}_R = \left[\dfrac{U_R}{I_R}, 0\right] \end{cases}$$

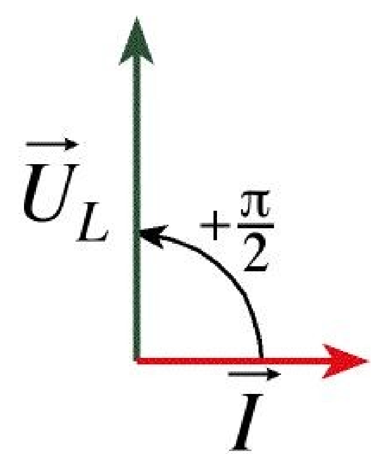
b) Dipôle purement inductif :



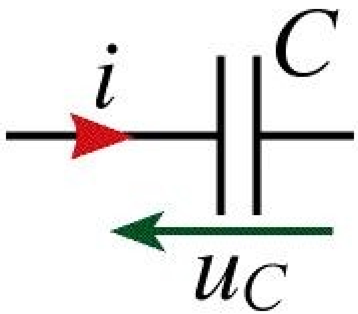
$$\begin{cases} \tilde{U}_L = \left[U_L, 0\right] \\ \tilde{I}_L = \left[I_L, -\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \tilde{Z}_R = \left[\dfrac{U_L}{I_L}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\tilde{Z}_L = \left[L\omega, +\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad \tilde{Z}_L = iL\omega$$

$$\tilde{V}_L = \tilde{Z}.\tilde{I}_L = i.L\omega.\tilde{I}_L$$



C) Dipôle purement capacitif



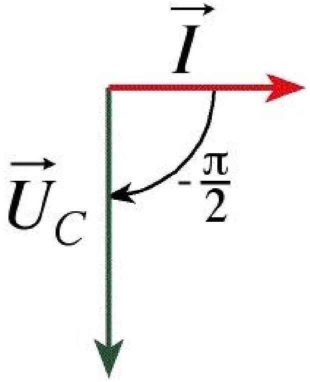
$$\tilde{U}_C = [U_C, 0]$$

$$\tilde{I}_C = \left[I_C, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tilde{Z}_C = \left[\frac{U_C}{I_C}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tilde{Z}_C = \left[\frac{1}{C\omega}, -\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad \tilde{Z}_c = \frac{1}{i.C\omega} = \frac{-i}{C\omega}$$

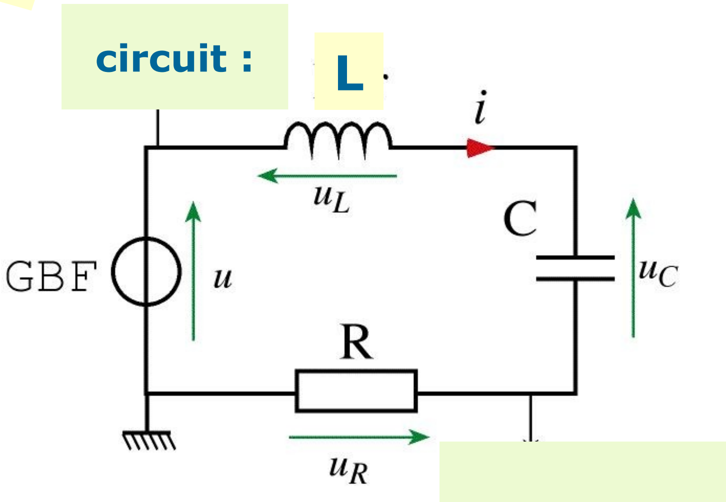
$$\tilde{U}_C = \frac{\tilde{I}_C}{i.C\omega}$$



III- Association de dipôles passifs

élément	impédance complexe Z	admittance complexe Y	Réactance X_e=Im(Z)	susceptanceS=Im (Y)
R	R	1/R	0	0
Inductance L	i. L.ω	1/(i.Lω)	Lω	-1/(Lω)
capacité C	1/(i.Cω)	i.C.ω	-1/(Cω)	Cω

a) Associations en série



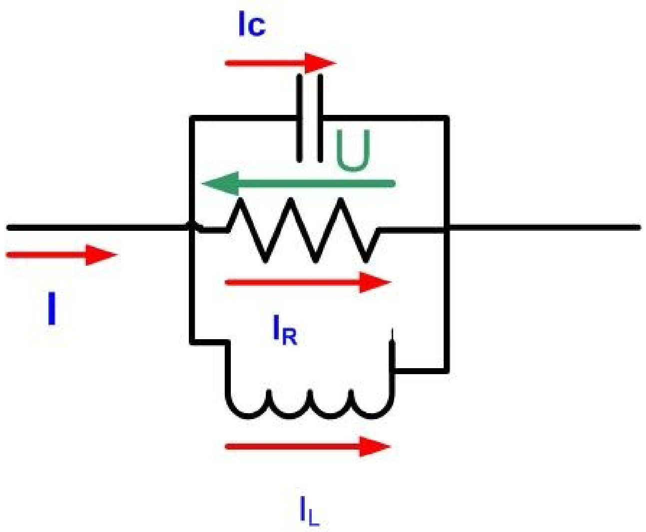
$$\tilde{U} = \tilde{U}_R + \tilde{U}_C + \tilde{U}_L$$

$$\tilde{U} = R.\tilde{I} + \frac{1}{i.C.\omega}\tilde{I} + i.L\omega\,\tilde{I}$$

$$\tilde{U} = \tilde{I}.\left[R + i.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)\right]$$

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \left[R + i.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)\right]$$

b) Associations R, L, C en parallèle :



$$\tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C + \tilde{I}_L$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R} + \frac{\tilde{U}}{i.L\omega} + i.C.\omega\,\tilde{U}$$

$$\tilde{I} = \tilde{U}.\left[\frac{1}{R} + i\left(c\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]$$

$$\tilde{Y} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}} = \frac{1}{R} + i\left(c\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

Admittance complexe du dipôle

c- Cas particulier : circuit RLC série-parallèle : La résonance:

2) R-L-C série :

L'impédance complexe

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \left[R + i.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega} \right) \right]$$

La pulsation de résonnance s'obtient lorsque l'impédance devient réelle :

$$\left[R + i.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega} \right) \right] = R$$

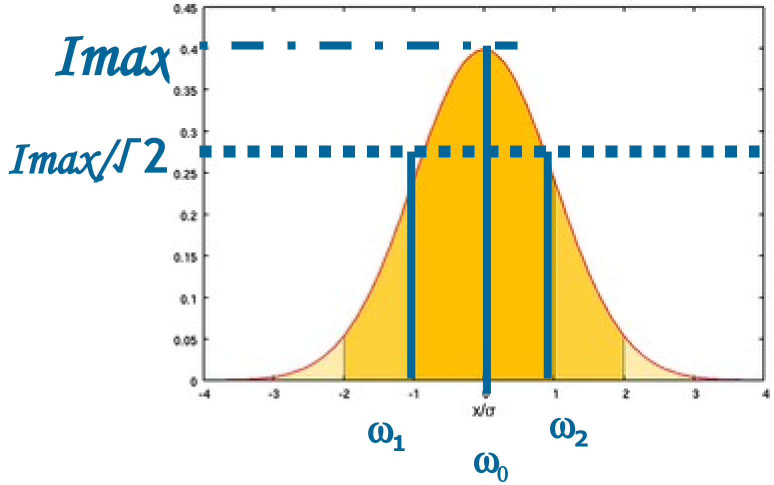
$$L\omega = \frac{1}{c\omega} \quad \Longrightarrow \quad LC\omega^2 = 1$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$\tilde{Z} = R$ **est minimum et donc le courant atteint sa valeur maximale:**

$$I = I_{\max} = \frac{U}{R}$$

$\tilde{U}$ et $\tilde{I}$ **sont en phase.**



ω_2-ω_1 : intervalle de pulsation nommé bande passante.

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \text{bande passante}$$

$$\text{on a :} \quad I \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Facteur de Qualité : $$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R}$$

caractérise l'acuité de la résonnance.
Q caractérise aussi la surtension aux bornes de L et C.

2) Circuit R-L-C parallèle :
L'admittance complexe : $$Y = \frac{1}{R} + j(c\omega - \frac{1}{L\omega})$$

Pour la pulsation de résonance $$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$$\tilde{Y} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}} = \frac{1}{R}$$ **(courant en phase avec la tension)**

L'admittance complexe devient réelle et est minimum

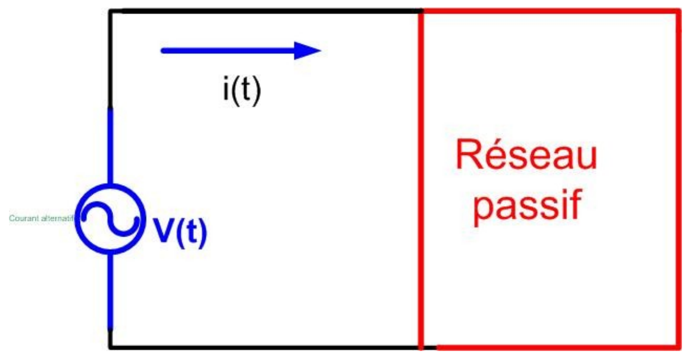
$\tilde{I}$ **atteint sa valeur minimale :** $$I_{\min} = \frac{U}{R}$$

c'est l' antirésonance.

IV- Puissance en régime alternatif et facteur de puissance

1- Introduction:

Dans un grand nombre d'appareils électriques, on s'intéresse essentiellement à la puissance : par exemple puissance delivrée par un alternateur, puissance consommée par un moteur ou celle fournie par un émetteur de télévision.



La puissance p positive correspond à un transfert d'énergie de la source au réseau, alors qu'une puissance négative correspond à un transfert d'énergie du réseau à la source.

2-La puissance en régime sinusoidal :

a) considérons le cas où le réseau comporte un élément inductif

$$v = V_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

La puissance à chaque instant est donné par :

$$p = v.i = V_m.I_m.\sin\omega t.\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\omega t$$

$$p = -V_m.I_m.\sin(\omega t).\cos(\omega t)$$

$$or \quad \sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$

$$donc \quad p = -\frac{1}{2}.V_m.I_m.\sin(2\omega t)$$

Schéma des courant-tensions pour un réseau avec inductance pure :

b) Schéma des courant-tensions pour un réseau avec capacité pure :

c) Le courant résultant de l'application d'une tension : $v = V_m . \sin \omega t$

à un réseau comportant une résistance R est : $i = I_m \sin \omega t$

La puissance correspondante est : $p = v.i = V_m . I_m . \sin^2 \omega t$

sin2x= ½ (1-cos 2x)

$$p = \frac{1}{2} . V_m . I_m . (1 - \cos 2\omega t)$$

On définit la puissance moyenne :

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T p.dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m . I_m}{2} \left(1 - \cos(2\omega t)\right) .dt$$

$$p = \frac{V_m . I_m}{2} \int_0^T \frac{dt}{T} - \frac{V_m . I_m}{2T} . \int_0^T \cos(2\omega t) .dt$$

Puissance moyenne : $p = \dfrac{V_m . I_m .}{2}$

d – Cas général d'un réseau passif :

On lui applique une tension : $v = V_m \sin \omega t$

et circule un courant $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$

$\theta > 0$ ou $\theta < 0$ selon le caractère capacitif ou inductif du circuit.
La puissance p s'écrit alors :

$$p = v.i = V_m.I_m.\sin \omega t.\sin(\omega t + \theta)$$

or $$\sin \alpha .\sin \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

et $$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

donc : $$p = \frac{1}{2} V_m.I_m.\left[\sin \theta - \cos\left(2\omega t + \theta\right)\right]$$

La puissance moyenne =

$$< p > = \frac{1}{2} < V_m.I_m \cos \theta > - \frac{1}{2} < V_m.I_m \cos(2\omega t + \theta) >$$

$$< p > = \frac{1}{T}\int_0^T p.dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}\cos\theta \, .dt - \cancel{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}\cos(2\omega\, t + \theta\,).dt}$$

$$< p > = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\theta$$

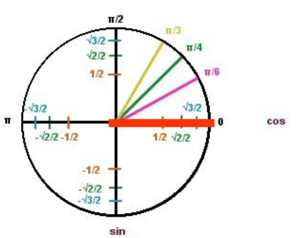
que l'on peut réécrire :

$$< p > = \frac{V_M}{\sqrt{2}} . \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos\theta \; = V_{eff} I_{eff} \cos\theta$$

$$< p > = VI \cos\theta$$

θ est le facteur de puissance

θ est le déphasage entre V et I est compris entre -90 et +90 degrés, donc $\cos\theta > 0$
ceci implique que la puissance moyenne est positive $<p> > 0$

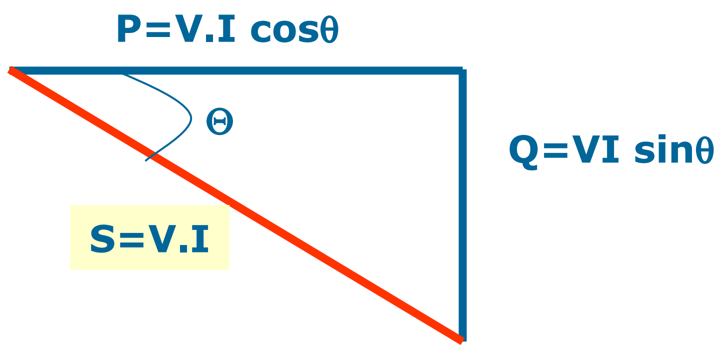


Conséquence par rapport au signe de θ :

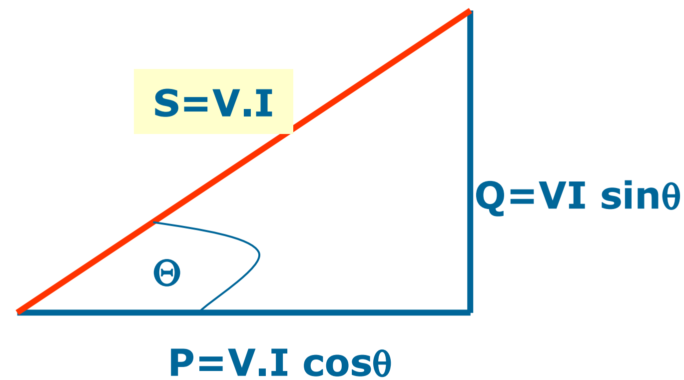
Circuit inductif :
Le courant est toujours en retard sur la tension, on dit que le circuit possède un « facteur de puissance inductif »

Circuit capacitif:
Le courant est en avance sur la tension et par conséquent, le circuit a « un facteur de puissance capacitif ».

3-Puissance apparente :
La puissance apparente est le produit : V.I et a pour symbole S;
S s’exprime en Volts Ampères (V.A)
4-Puissance réactive :
Le produit V.I sinΘ représente la « puissance réactive » et a pour symbole Q.
Q s’exprime en VoltAmpères réactifs (Var).



Triangle des puissances pour une charge inductive



Triangle des puissances pour une charge capacitive

5-Puissance complexe :

$$\tilde{V} = V.e^{j\alpha}$$

$$I = I.e^{j(\alpha+\theta)}$$

$$S = \tilde{V}.\tilde{I}^{*} = V.I.e^{j\alpha}e^{-j(\alpha+\theta)} = V.Ie^{-j\theta} = V.I(\cos\theta - j\sin\theta)$$

$$S = .VI\cos\theta - jV.I.\sin\theta$$

$$S = P - jQ$$

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V.I$$

Récapitulatif:

Puissance moyenne :

$$P = V.I\cos\theta = RI^2 = \frac{V_R^{\ 2}}{R} = \Re\,(V.I^*)$$

Puissance réactive :

$$Q = V.I\sin\theta = XI^2 = \frac{V_x^{\ 2}}{x} = \Im\,m(V.I^*)$$

Puissance apparente:

$$S = V.I = ZI^2 = \frac{V^2}{Z} = \left|V.I^*\right|$$

Facteur de puissance : **cosθ=P/S = R/Z**