Cours électronique

Chapitre 2: Dipôles en régimes transitoires

Abdenour Lounis

I- Rappels Relations Courant-tension pour les dipôle passifs usuels:

- **Resistance : Loi d'Ohm U(t)=R. I(t)**
- **Inductances : U(t)= L.(dI/dt)**
- **Condensateurs :**

$$I(t)=\int_t \frac{U(t)}{L}.dt$$

$$dQ(t)=C.dU(t)$$

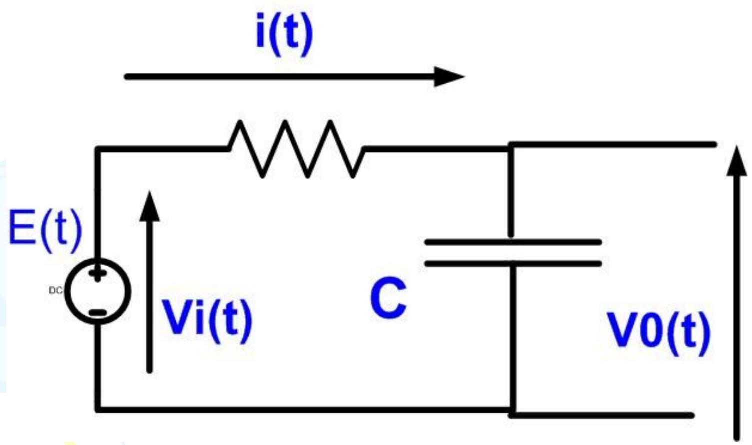
$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=C.\frac{dU(t)}{dt}$$

$$U(t)=\frac{1}{C}\int_t I(t).dt$$

II-Systèmes du 1er Ordre:

A- Circuit passe bas :

- **Charge d'un condensateur :**



Loi des mailles :

$$-V_i(t) + Ri + V_0(t) = 0$$

$$R.i = V_i(t) - V_0(t)$$

$$i = \frac{V_i(t) - V_0(t)}{R}$$

on sait que :

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{V_i(t) - V_0(t)}{R.C}$$

si $\tau = RC$

$$\tau . \frac{dV_0(t)}{dt} + V_0(t) = V_i(t)$$

Equation différentielle du 1er Ordre

τ est nommée constante de temps du circuit

2-décharge d'un condensateur :

a- Résolution de l'équation différentielle sans second membre:

$$\tau \,.\, \frac{dV_0(t)}{dt} + V_0(t) = 0$$

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \frac{-1}{\tau} . V_0(t)$$

$$\int \frac{dV_0(t)}{V_0(t)} = \frac{-1}{\tau} . \int dt$$

$$Log V_0(t) = -\frac{t}{\tau} + A'$$

avec A' constante

$$Log(V_0(t)) = -\frac{t}{\tau} + C$$

$$V_0(t) = e^{-\frac{t}{\tau} + C}$$

on sait que $e^a . e^b = e^{a+b}$

$$V_0(t) = e^C . e^{-\frac{t}{\tau}} = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La solution sans second membre est alors :

$$V_0(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b-équation particulière avec second membre :

$$\tau \cdot \frac{dV_0(t)}{dt} + V_0(t) = V_i(t)$$

Si $V_0(t)$ est constant; En régime permanet $V_0(t)=E$

→ $(dV_0(t)/dt)=0$

Alors la solution complète est la somme des deux solutions b) et b) ce qui donne :

$$V_0(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

$$V = V_0 . e^{-\frac{t}{\tau} + C}$$

$$e^a . e^b = e^{a+b}$$

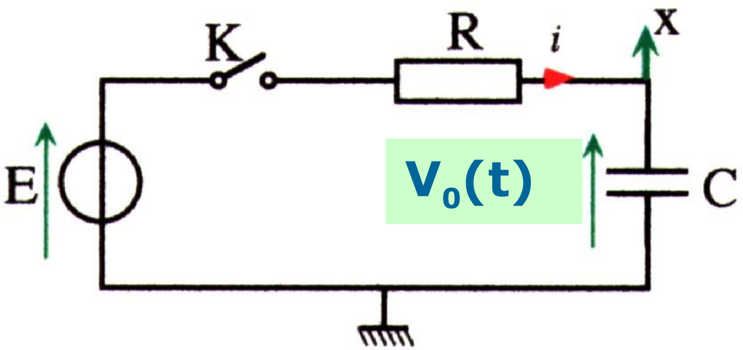
$$V_0(t) = e^C . e^{-\frac{t}{\tau}} = A . e^{-\frac{t}{\tau}}$$

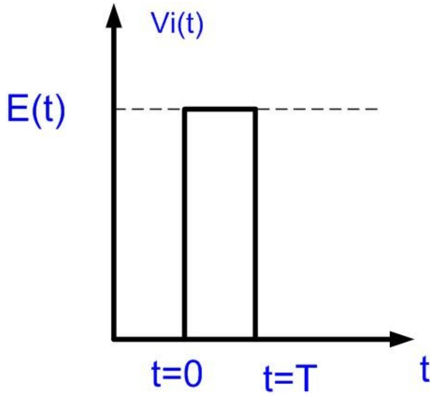
C est une constante donc e^c=A constante:

$$V_0(t) = A . e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c) solutions physiques avec conditions initiales :

i-charge du condensateur :





A t=0 $V_0(t)=0$

$$V_0(t) = 0 = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + E = A.e^0 + E$$

$$0 = A + E$$

$$A = -E$$

donc

$$V_0(t) = -E.e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

$$V_0(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad 0<t<T$$

C'est la charge du condensateur

ii-décharge du condensateur :

$$\tau \cdot \frac{dV_0(t)}{dt} + V_0(t) = 0$$

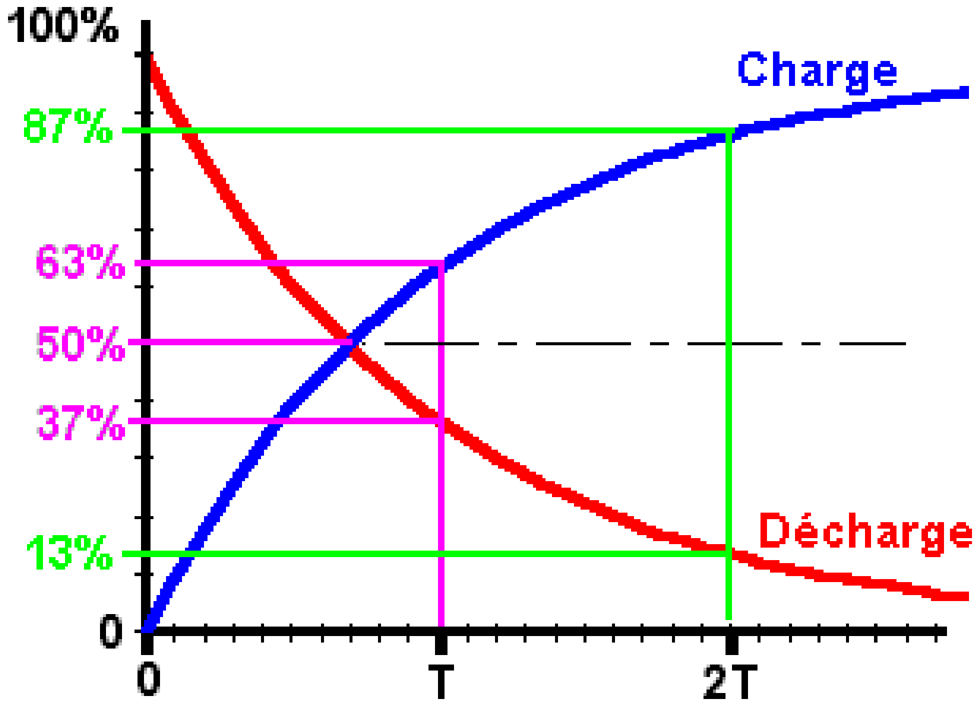
$$V_0(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

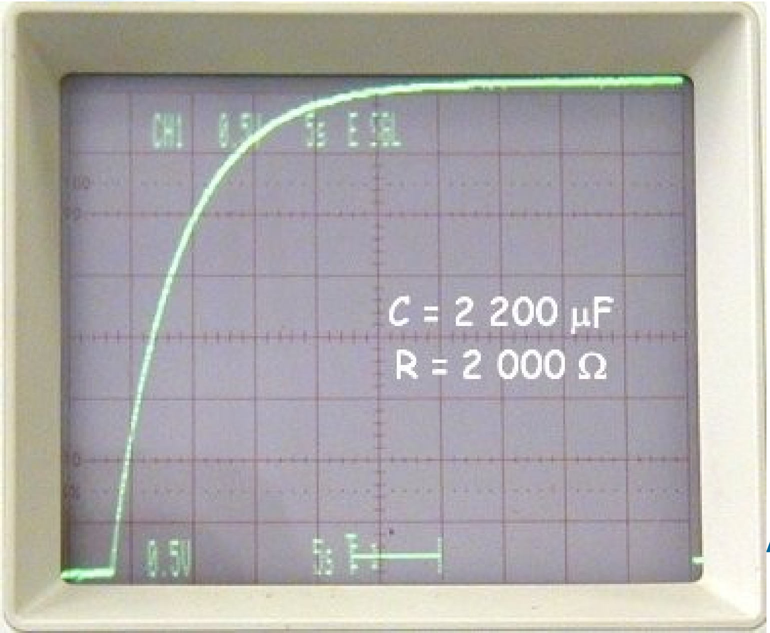
à t=0 $\quad V_0(t) = E$

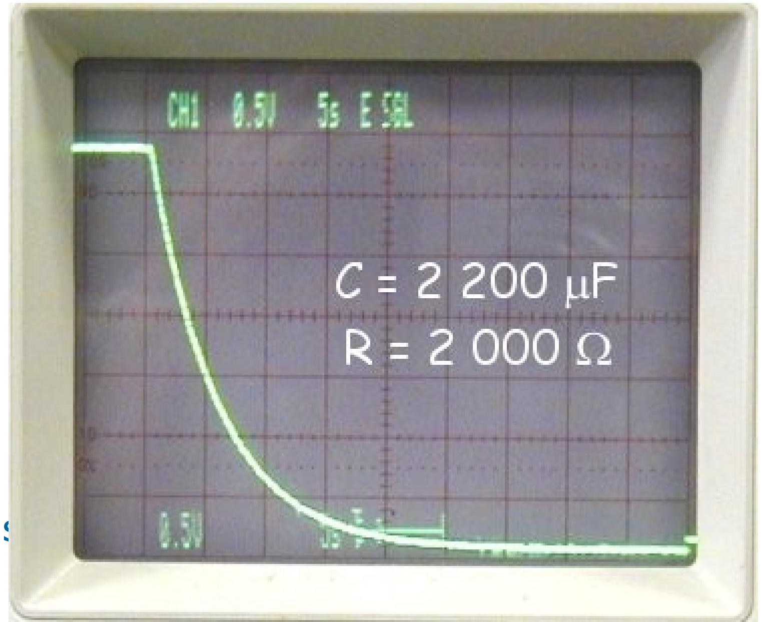
donc $V_0(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

c'est la décharge du condensateur

schéma de la charge et la décharge du condensateur

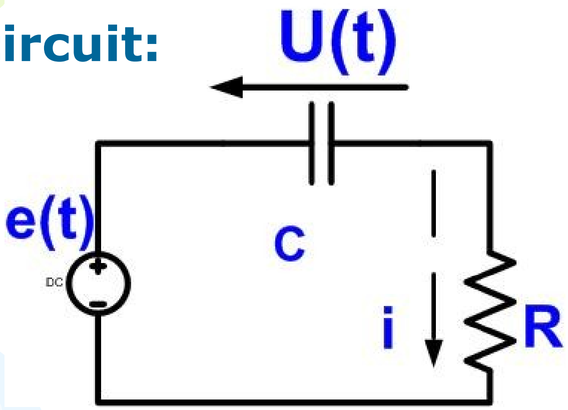


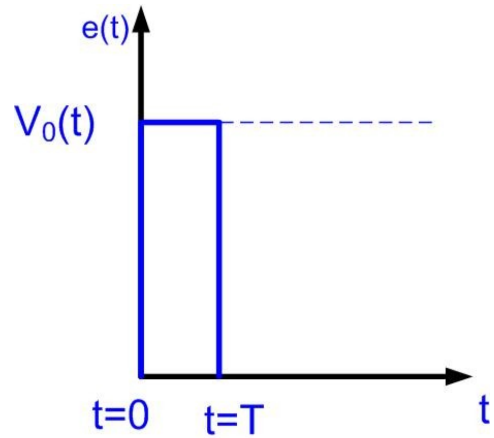




B- Circuit passe haut:

i) circuit:





conditions initiales :

$$e(t)=0 \quad t \leq 0 \quad t \rangle T$$

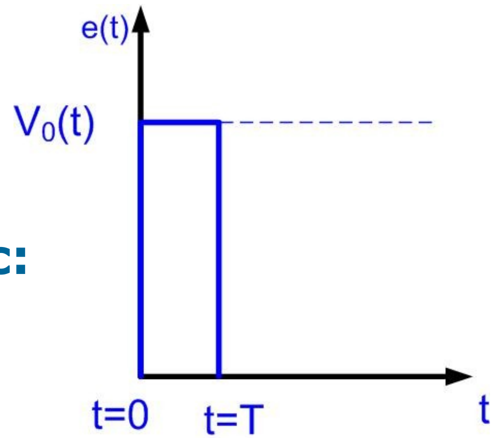
$$e(t)=V_0 \quad 0 \leq t \leq T$$

Aux bornes de la capacité : U(t)=Q(t)/C
or Loi des mailles : U(t)=e(t)-Ri(t)

$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU(t)}{dt}$$

$$e(t) = U(t) + R.C.\frac{dU(t)}{dt}$$

$$R.C.\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=e(t)$$



Alors pour $0<t<T$ $e(t)=V_0$ donc:

$$R.C.\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=V_0$$

Résolution de l'équation différentielle sans second membre:

$$R.C.\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=0$$

solution :

$$U(t)=A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- solution particulière avec second membre

$$R.C.\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=V_0$$

En régime permanent :
$dU(t)/dt=0$ et $U(t)=V_0$

- solution globale:

$$U(t)=A.e^{-\frac{t}{\tau}}+V_0$$

- <u>Conditions aux limites :</u>

a) t=0 condensateur déchargé : $0=A+V_0$

$A=-V_0$

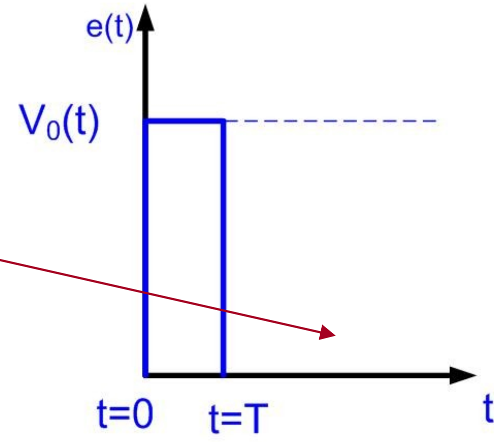
donc la solution finale est :

$$U(t)=-V_0.e^{-\frac{t}{\tau}}+V_0$$

$$U(t)=V_0.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

b) t>T

e(t)=0



$$R.C.\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=0$$

<u>solution :</u>

$$U(t)=A_2.e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [1]$$

<u>calculons A2 ?</u>

on sait que lorsque t=T , on a la solution : $U(t)=V_0.(1-e^{-\frac{T}{\tau}})$ **[2]**

Si on égalise les 2 solutions [1] et [2], on obtient :

$$V_0.(1-e^{-\frac{T}{\tau}})=A_2.e^{-\frac{T}{RC}}$$

$$A_2=V_0.\left(e^{\frac{T}{RC}}-1\right)$$

solution générale :

$$U(t) = \underbrace{V_0.(e^{\frac{T}{\tau}} - 1)}_{A_2.}.e^{-\frac{t}{RC}}$$

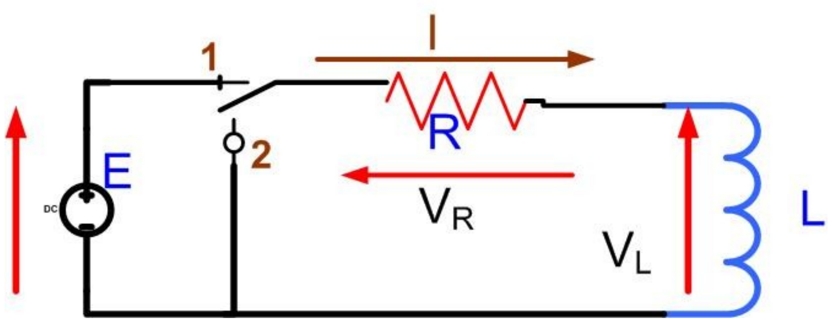
$e^{-t/RC}$

Expression de la tension en fonction du temps pour un filtre passe haut.

ii) Etablissement d'un courant dans une inductance:

a) Régime libre

régime libre en 2
régime forcé en 1



$$E(t) = RI(t) + L.\frac{dI(t)}{dt}$$

Supposons qu'on soit en régime libre : E=0

$$0 = RI(t) + L.\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}.I(t) = 0$$

$$\frac{dI(t)}{I} = -\frac{R}{L}.dt = -\frac{dt}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

La solution au régime libre est donnée par : $I(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Si on considère les conditions initiales :

$$I(t=0) = I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0$$

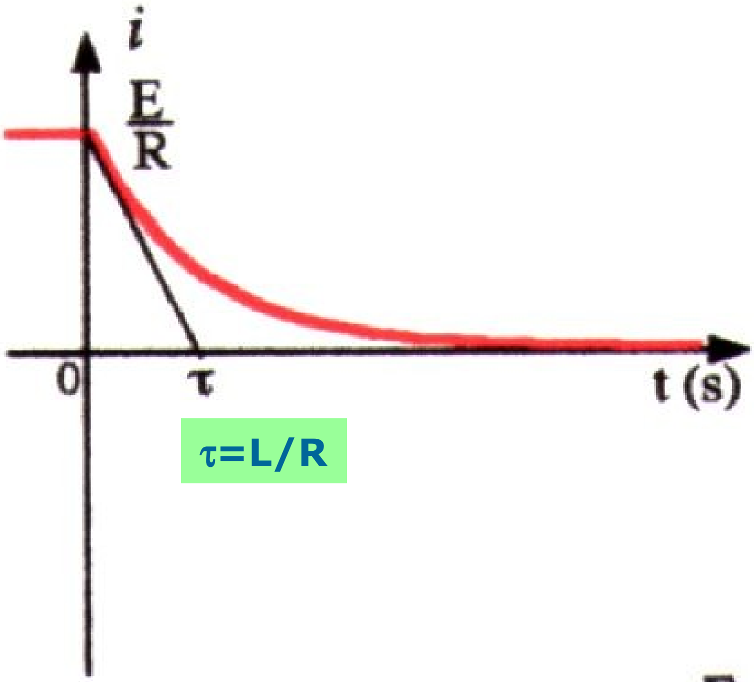
$$\text{donc } I(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

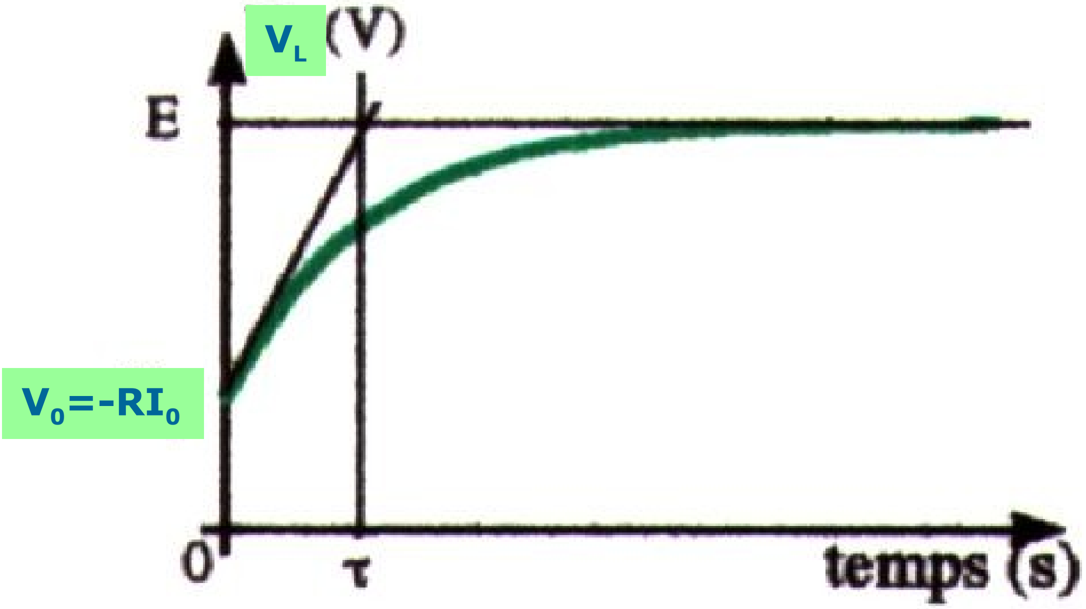
cherchons la tension aux bornes de l'inductance :

$$V_L = L.\frac{dI(t)}{dt} = \frac{-LI_0}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_L(t) = -R.I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

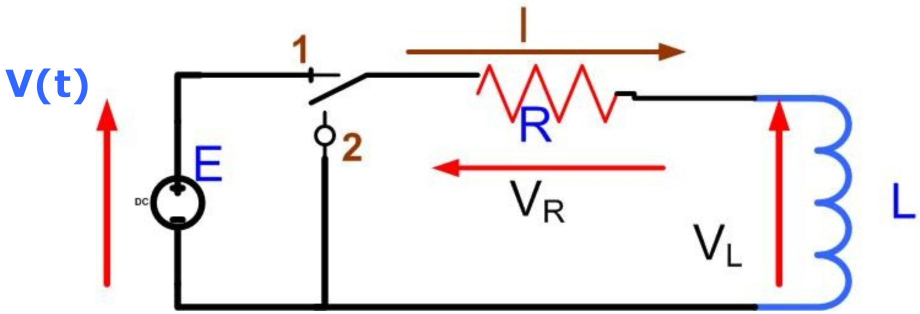
Schéma I(t) et V(t) en régime libre





b) régime forcé avec tension E non nulle

Si $I_t=0$ on obtient :
(inverseur en position 1)



$$V_L(t=0) = -R.I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0$$

$$V(t) = RI_0 + V_L = RI_0 - RI_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V(t) = RI_0.(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = E.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

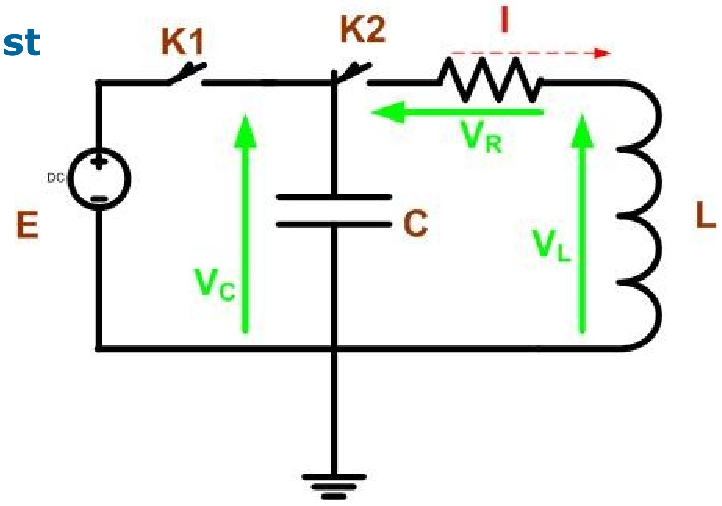
$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{E}{R}.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$I(t) = \frac{E}{R}.(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et} \quad V_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le courant dans le circuit tend vers E/R ; la tension aux bornes de l'inductance tend vers 0.

III-Systèmes du 2ème Ordre:

Le condensateur C du circuit RLC suivant
est chargé par un générateur auxilliaire qui est
ensuite déconnecté par K1



La charge initiale du condensateur : Q_0=C.E

Si K2 est fermé, K1 ouvert , nous avons :

$$V_c + V_L + V_R = 0$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{q}{C} + L.\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt} \quad ; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{on a donc :}$$

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (1)$$

on pose :

$$LC\omega^2 = 1; \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad ; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

(1) devient :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (2)$$

on cherchera les solutions du type

$$q(t) = A.e^{rt}; \implies \frac{dq}{dt} = Ar.e^{rt}; \quad \frac{d^2q}{dt^2} = A.r^2.e^{rt}$$

L'équation (2) devient : $\cancel{A.e^{rt}}\left(r^2 + \frac{\omega_0}{Q}.r + \omega_0^2\right) = 0$

Polynomes du second degré: $Ax^2 + Bx + C = 0$

Les racines du polynôme du second degré s'ecrivent

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En ce qui concerne notre polynôme :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4.Q^2}$$

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Comme on a posé : $LC\omega_0^2 = 1; \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad ; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$

Les deux racine s'écrivent :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\alpha} = -\lambda \pm \sqrt{\alpha}$$

La solution générale de l'équation prend alors la forme suivante :

$$q(t) = A_1.e^{r_1 t} + A_2.e^{r_2 t};$$

$$q(t) = A_1.e^{(-\lambda + \sqrt{\alpha})t} + A_2.e^{(-\lambda - \sqrt{\alpha})t};$$

$$q(t) = A_1.e^{r_1 t} + A_2.e^{r_2 t};$$

$$q(t) = A_1.e^{(-\lambda + \sqrt{\alpha})t} + A_2.e^{(-\lambda - \sqrt{\alpha})t};$$

$$q(t) = e^{-\lambda .t}\left[A_1.e^{\sqrt{\alpha}.t} + A_2.e^{-\sqrt{\alpha}.t} \right]$$

On a dans ce cas constante de temps τ=1/λ

Selon le signe de a sous la racine, les solutions diffèrent :

- **cas où α est positif : α >0**

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4.Q^2}$$

$$\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4.Q^2} = \alpha > 0$$

$$1-4.Q^2 > 0 \longrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

Q <1/2 Amortissement fort

Les deux racines sont réelles. Si on pose :

$$\Omega = \sqrt{\alpha} = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Les conditions initiales sont : **$q(t)=q_0$** **$I(t=0)=0$**

$$q(t) = A_1.e^{r_1 t} + A_2.e^{r_2 t};$$

$$\Rightarrow \quad q(t=0) = q_0 = A_1 + A_2; \quad \text{i}$$

$$\frac{dq}{dt}(t=0) = A_1.r_1 + A_2 r_2 = 0 \quad \text{ii}$$

Rappel:

donc

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4.Q^2}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\alpha} = -\lambda \pm \Omega$$

$$A_1 r_1 + A_2 r_2 = 0 = A_1.(-\lambda + \Omega) + A_2.(-\lambda - \Omega) = 0$$

On aboutit au système d'équation suivant:

$$\begin{cases} A_1.(-\lambda + \Omega) = A_2.(\lambda + \Omega) \\ A_1 + A_2 = q_0 \end{cases}$$

rappel : solution cherchée

$$q(t) = e^{-\lambda.t}\left[A_1.e^{\sqrt{\alpha}.t} + A_2.e^{-\sqrt{\alpha}.t}\right]$$

on en tire :

$$A_1 = \frac{q_0}{2\Omega}(\lambda + \Omega) \qquad A_2 = \frac{q_0}{2\Omega}(-\lambda + \Omega) \qquad \text{donc :}$$

$$q(t) = \frac{q_0}{2\Omega}(\lambda + \Omega)e^{-\lambda.t}e^{\Omega.t} + \frac{q_0}{2\Omega}(-\lambda + \Omega)e^{-\lambda.t}e^{-\Omega.t}$$

$$q(t) = \frac{q_0}{2\Omega}e^{-\lambda.t}\left[(\lambda + \Omega)e^{\Omega.t} + \frac{q_0}{2\Omega}(-\lambda + \Omega)e^{-\Omega.t}\right]$$

on utilise les relations suivantes :

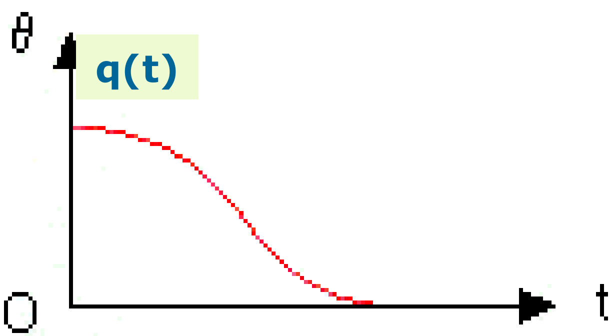
$$\Omega^{2} - \lambda^{2} = \alpha - \lambda^{2} = \left(\lambda^{2} - \omega_{0}^{2}\right) - \lambda^{2}$$

$$\text{donc} \quad \Omega^{2} - \lambda^{2} = \omega_{0}^{2}$$

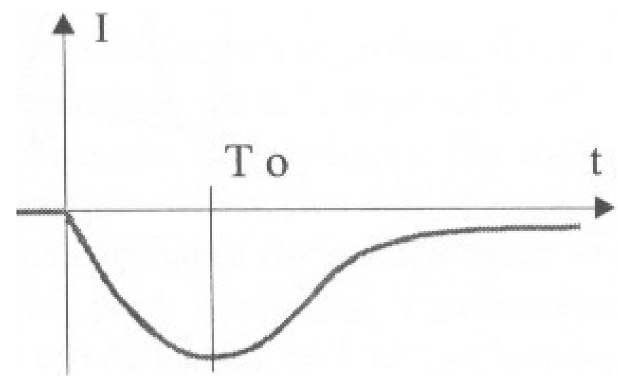
on obtient la solution suivante pour le courant I(t):

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -q_{0} \cdot \frac{\omega_{0}^{2}}{2\Omega} e^{-\lambda . t}\left[e^{\Omega . t} - e^{-\Omega . t}\right]$$

Régime apériodique



CHARGE



COURANT

b) cas où α est nul α = 0 :

$$\Omega = \sqrt{\alpha} = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} = 0$$

$$4Q^2 = 1 \qquad Q = 1/2$$

Amortissement critique

Nous avons des racines doubles :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\alpha} = -\lambda \pm \sqrt{\alpha} = 0$$

$$r_{1,2} = -\lambda$$

La solution générale est de la forme : $q(t) = (A_1 . + tA_2).e^{rt};$

Avec les même conditions initiales que précédement, on obtient les solutions:

$$q(t) = (1+\lambda t).e^{-\lambda t};$$

$$I(t) = -q_0.\lambda^2.t.e^{-\lambda t}$$

Régime apériodique et critique

c) cas où α est négatif $\alpha < 0$:

$$Q > \frac{1}{2} \qquad R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

amortissement faible

Les deux racines sont imaginaires :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^{\;2} - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega$$

$$avec \quad \omega^2 = \omega_0^{\;2} - \lambda^2$$

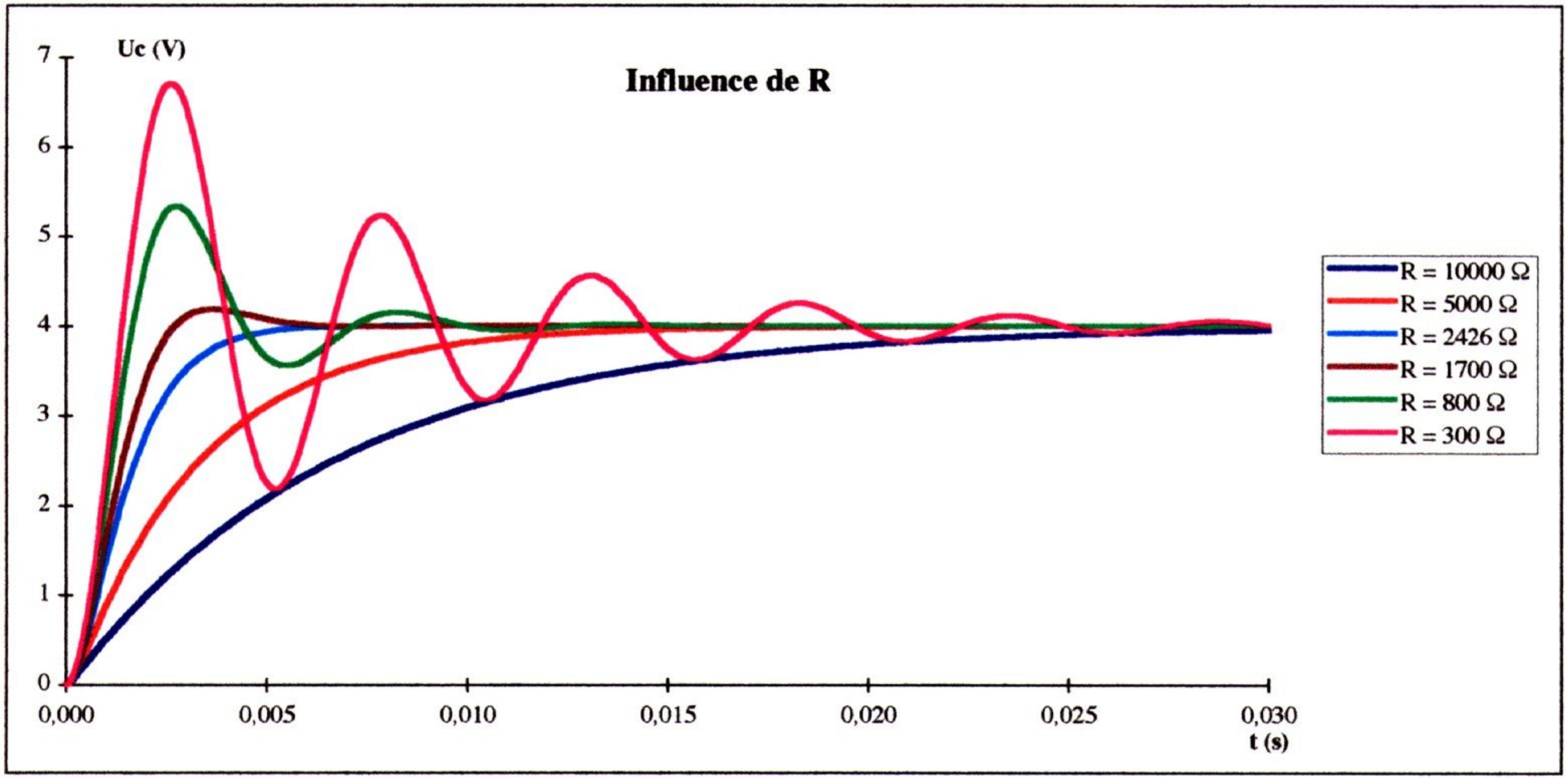
En prenant les même conditions initiales : q(t=0)=q0 et i(t=0)=0
On obtient la solution suivante :

$$q(t) = q_0 \frac{e^{-\lambda t}}{2j\omega}\left[\left(\lambda + j\omega\right)e^{j\omega t} + \left(-\lambda + j\omega\right)e^{-j\omega t}\right]$$

on pose tgϕ = λ/ω et cos $\phi=\omega/\omega_0$ on obtient la solution :

$$q(t) = q_0 \frac{e^{-\lambda t}}{2j\omega}\cos(\omega t - \varphi)$$

Régime oscillant amorti pseudopériodique T=2π/ω ; λ amortissement


Influence de R
Uc (V)
7
6
5
4
3
2
1
0
0,000
0,005
0,010
0,015
0,020
0,025
0,030
t (s)
R = 10000 Ω
R = 5000 Ω
R = 2426 Ω
R = 1700 Ω
R = 800 Ω
R = 300 Ω

Si R=0 ; nous avpns un amortissement nul !

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

$$Solution: \quad q(t) = q_0 . \cos \omega_0 t$$

<u>Régime sinusoïdal périodique et non amorti: Période T=2π/ω</u>