

L2 Physique et Applications

Travaux dirigés de Physique

Electromagnétisme



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Table des matières

0.1	Notations.	1
0.2	ELECTROSTATIQUE.	2
0.2.1	Force sur une charge élémentaire.	2
0.2.2	Ordre de grandeurs.	2
0.2.3	Caractérisation de champs électriques.	2
0.2.4	Force électrostatique.	3
0.2.5	Pendule électrostatique.	3
0.2.6	Transferts de charges.	3
0.2.7	Champ créé par deux charges.	4
0.2.8	2 pendules électrostatiques.	4
0.2.9	Charge dans un champ uniforme.	4
0.2.10	Charges sur un carré.	4
0.2.11	Divers exercices sur le calcul vectoriel.	4
0.3	CHAMPS ET POTENTIELS.	6
0.3.1	Equipotentielles - Lignes de champ.	6
0.3.2	Champ en coordonnées polaires.	6
0.3.3	Potentiel en coordonnées polaires.	6
0.3.4	Sphère chargée en volume.	7
0.3.5	Segment uniformément chargé - Champs sur les deux axes.	7
0.3.6	Segment uniformément chargé.	7
0.3.7	Spire uniformément chargée.	8
0.3.8	Arc de cercle uniformément chargée.	8
0.3.9	Champ électrostatique créé par un anneau chargé . . .	9
0.3.10	Potentiel au centre d'un carré.	9
0.3.11	Différentes sphères chargées (I).	10
0.3.12	Sphère chargée (II).	10
0.3.13	Cavité dans une sphère chargée.	10
0.3.14	Flux à travers les surfaces d'un cube.	11
0.3.15	Plans chargés. Relations de passage.	11
0.3.16	Faisceau de particules chargées.	11
0.3.17	Pinceau d'électron.	12
0.3.18	Dipôle électrique.	12
0.3.19	Dipole électrique.	13
0.3.20	Molécule d'eau.	13
0.4	ENERGIE ELECTROSTATIQUE.	14

0.4.1	Charges sur un losange.	14
0.4.2	Travail de la force électrique (I).	14
0.4.3	Travail de la force électrique (II).	14
0.4.4	Charges sur un cube.	15
0.4.5	Energie potentielle d'une sphère - Fission d'un atome.	15
0.4.6	Densité de charges non uniforme.	16
0.4.7	Energie d'interaction entre deux molécules d'eau.	16
0.4.8	Energie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique.	16
0.5	CONDUCTEURS	18
0.5.1	Sphères métalliques.	18
0.5.2	Système sphère-pendule	18
0.5.3	Sphères conductrices chargées (I).	18
0.5.4	Sphères conductrices chargées (II).	19
0.5.5	Coefficients d'influence mutuelle.	19
0.5.6	Système de conducteurs cylindriques	19
0.5.7	Condensateurs en parallèles.	19
0.5.8	Condensateur plan.	19
0.5.9	Système de charges ponctuelles.	20
0.5.10	Influence mutuelle.	20
0.5.11	Système de plans conducteurs	20
0.5.12	Charges induites.	20
0.6	INTERACTION MAGNETOSTATIQUE	21
0.6.1	Modèle de conduction dans les métaux.	21
0.6.2	Charges en mouvement sur un cube.	21
0.6.3	Champ magnétique créé par un électron.	21
0.6.4	Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.	22
0.6.5	Fil infini.	22
0.6.6	Interaction entre deux fils infinis.	22
0.6.7	Balance de Cotton.	22
0.6.8	Spire circulaire.	23
0.6.9	Spire carrée.	23
0.6.10	Solénoïde fini.	23
0.6.11	Courant sur une sphère.	23
0.6.12	Cylindre infini.	23
0.6.13	Cylindres coaxiaux.	24
0.6.14	Conducteur cylindrique.	24
0.6.15	Fil de longueur finie.	24
0.6.16	Potentiel vecteur d'un conducteur cylindrique.	24
0.6.17	Moment magnétique d'une sphère en rotation.	24
0.7	Examen septembre 2008	24
0.8	Examen janvier 2009	26
0.9	Formulaire	27
0.9.1	Gradient	27
0.9.2	Divergence	27
0.9.3	Rotationnel	27

0.1 Notations.

On utilise les notations suivantes :

$$\vec{\nabla}f(M) = \text{grad}f(M)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M) = \text{div}\vec{A}(M)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(M) = \text{rot}\vec{A}(M)$$

densité volumique de charge = ρ

densité surfacique de charge = σ

densité linéique de charge = λ

champ électrique = $\vec{E}(M)$

potentiel électrostatique = $V(M)$

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$$

densité de courant = \vec{j}

champ magnétique = $\vec{B}(M)$

potentiel vecteur = $\vec{A}(M)$

$$\vec{B}(M) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(M)$$

0.2 ELECTROSTATIQUE.

0.2.1 Force sur une charge élémentaire.

Soit une région de l'espace rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le champ électrostatique au point 0 est égal à $\vec{E}_0 = E_x \vec{i}$ avec $E_x = 1000 \text{ V.m}^{-1}$.

Comparer les forces électrostatiques qui s'exercent sur un proton ou un électron placés successivement en 0.

0.2.2 Ordre de grandeurs.

1. Dans un atome d'hydrogène, la distance la plus probable de l'électron au noyau est égale à 53 pm. Quelle est pour cette distance, l'intensité de la force électrostatique d'interaction entre le noyau et l'électron? La comparer à l'intensité de la force gravitationnelle entre ces deux particules, laquelle vaut environ $3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$.

. *Rép. : Force électrique $F_{el} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ N}$*

. *Force gravitationnelle $F_g = 4 \cdot 10^{-47} \text{ N}$*

2. Dans le noyau d'un atome de diamètre $2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, calculer l'intensité de la force électrostatique qui s'exerce entre deux protons diamétralement opposés.

. *Rép. : Force électrique $F_{el} = 0.576 \text{ N}$*

3. Calculer l'intensité de la force électrostatique qui s'exercerait entre deux charges de 1 C situées à 100 m l'une de l'autre. Remarque?

. *Rép. : Force électrique $F_{el} = 9 \cdot 10^5 \text{ N}$*

4. La masse atomique du cuivre étant égale à 63 et sa densité à 9, calculer le nombre de noyaux présents dans 1 cm^3 de cuivre. On admettra que ce nombre est celui des électrons libres présents.

- (a) Quelle serait la charge du morceau de cuivre de 1 cm^3 , si on lui enlevait 1/1000000 de ses électrons libres?

. *Rép. : Charge électrique $Q = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ C}$*

- (b) Quelle serait la force qui s'exercerait sur 2 morceaux identiques, ainsi électrisés, et placés à un mètre l'un de l'autre?

. *Rép. : Force électrique $F_{el} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ N}$*

0.2.3 Caractérisation de champs électriques.

1. Des charges ponctuelles $+q$ et $-q$ sont situées respectivement en A et B. Quel est le champ électrostatique créé par ces charges en un point M de la médiatrice du segment AB?
2. Une sphère de dimension très réduite (assimilable à un point matériel) porte une charge $q = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Située en un point P dans le vide, elle

est soumise à une force F d'origine électrostatique horizontale dirigée sur votre schéma vers la gauche, d'intensité $0,2 \text{ N}$.

Caractériser le champ électrostatique au point P .

3. Une charge ponctuelle $q = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ est située en un point O dans le vide. Caractériser le champ électrostatique produit par cette charge en un point A situé à la distance $d = 10 \text{ cm}$ du point O .

0.2.4 Force électrostatique.

1. Une particule située dans un champ électrostatique d'intensité $5 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$ est soumise à une force de sens opposé au vecteur champ électrostatique d'intensité $8 \cdot 10^{-14} \text{ N}$.
Quelle est la charge de la particule ?
2. Caractériser l'interaction entre une charge ponctuelle q_1 située en A et une charge ponctuelle q_2 située en B dans le vide.
Application numérique : $q_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$; $q_2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$; $r = AB = 2 \text{ cm}$.
3. Déterminer le champ électrostatique (direction, sens et intensité) capable de produire sur un électron une force compensant son poids. Conclure. Même question pour un proton.
Application numérique : masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

0.2.5 Pendule électrostatique.

La boule d'un pendule électrostatique, de masse $2,5 \text{ g}$, porte une charge de $0,5 \mu\text{C}$ ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$).

1. Quelle doit être l'intensité d'un champ électrostatique horizontal pour que le fil fasse un angle de 30° avec la verticale ?
2. Quel angle fait le fil avec la verticale si le champ électrostatique a une intensité de 10^4 V.m^{-1} ? Calculer la tension du fil.

0.2.6 Transferts de charges.

Deux sphères électrisées, quasi ponctuelles, A et B , identiques, sont placées dans l'air à 1 m l'une de l'autre et s'attirent avec une force de $17,6 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. On les met en contact puis on les place à 50 cm l'une de l'autre ; elles se repoussent alors avec une force de $16 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

1. Quelles étaient, avant et après contact, les charges des deux sphères ?
2. Peut-on donner toutes les caractéristiques du champ électrique au point I , milieu de AB , avant et après contact ?

0.2.7 Champ créé par deux charges.

Deux charges électriques ponctuelles de 1 nC et 9 nC sont situées respectivement en deux points A et B, distants de 8 cm. Trouver le point de la droite AB où le champ électrostatique est nul.

0.2.8 2 pendules électrostatiques.

Deux pendules électrostatiques identiques sont constitués par deux petites boules conductrices de masse 0.2 g et suspendues par un fil isolant de longueur 0.3 m. Les deux fils sont attachés au même point de suspension. Les boules étant en contact, on leur communique la même charge.

1. Que se passe-t-il ?
2. Quelle est la charge portée par chaque boule si elles sont distantes de 10 cm à l'équilibre ?

0.2.9 Charge dans un champ uniforme.

Une charge ponctuelle q est placée en un point 0 d'un champ électrostatique uniforme tel que $\vec{E}_1 = 200.\vec{i}$ (en $V.m^{-1}$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Au point A(-4,0,0), le champ total est nul. L'unité de longueur est le centimètre.

1. Calculer la valeur de la charge q .
2. Déterminer le champ électrique au point B(- 2, 2, 0) et, au point C (4,3,0).

0.2.10 Charges sur un carré.

Quatre sphères conductrices identiques très petites, sont montées sur un support isolant et disposées aux sommets d'un carré ABCD de côté 10 cm et placé dans l'air. Les sphères situées en A et C, sommets opposés, portent une charge $0.4 \mu C$, les deux autres une charge de $-0.8 \mu C$.

1. Calculer le champ électrostatique créé par les trois charges B, C et D en A. En déduire la force qui s'exerce sur la charge située en A.
2. Calculer le champ en 0, centre du carré ABCD.

0.2.11 Divers exercices sur le calcul vectoriel.

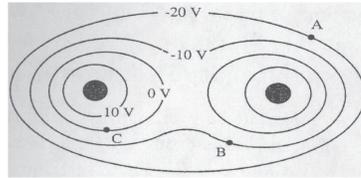
1. Soit $U(x, y, z) = 3x^2yz^2 + 4y^2zx^3$ un champ scalaire. Montrer que $\vec{\nabla}U$ au point M(1,-1,2) est parallèle au plan (Oyz).
2. Un point M(x, y, z) étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = O\vec{M}$, calculer $\vec{\nabla}(r)$, $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ et $\vec{\nabla}(\log r)$.

3. Quelles sont au point $M(0, -\frac{1}{2}, 2)$ les composantes du vecteur unitaire de la normale à la surface d'équation : $2x^2 + 3y^2 + z^2 = A = \text{constante}$?
4. En explicitant la relation $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}$, donner l'expression du gradient :
 - (a) en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) .
 - (b) en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .
5. Calculer la divergence du rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.
6. Calculer la divergence du champ $\vec{E} = K \frac{\vec{r}}{r^3}$ avec $K = \text{constante}$.
7. Calculer le rotationnel du rayon vecteur \vec{r} et de $\frac{\vec{r}}{r^3}$.
8. Quelle est la valeur de $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ avec $\vec{A} = 3x^2y\vec{i} - 2yz^3\vec{j} + x^2yk\vec{k}$ au point $M(1, 2, 1)$.

0.3 CHAMPS ET POTENTIELS.

0.3.1 Equipotentielles - Lignes de champ.

Le diagramme ci-dessous montre quelques équipotentiels dans un plan perpendiculaire à deux cylindres métalliques chargés, chargés. Le potentiel correspondant à chaque courbe est indiqué sur la figure.



1. Le cylindre de gauche est chargé positivement. Quel est le signe de la charge de l'autre cylindre ?
2. Sur une reproduction du diagramme, tracer quelques lignes de champ décrivant le champ électrique créé par les cylindres.
3. Donner la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les deux points A et B.
4. Quel travail effectue la force électrique si une charge $q = 0.50\text{C}$ est déplacée sur une trajectoire allant de A puis B en C ?

0.3.2 Champ en coordonnées polaires.

On considère un champ \vec{E} défini dans un plan par ses composantes en coordonnées polaires :

$$E_r = 2k \frac{\cos \theta}{r^3}, E_\theta = k \frac{\sin \theta}{r^3}$$

1. Quelle est l'équation des lignes de champ ?
2. Montrer que ce champ peut se mettre sous la forme $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Déterminer le potentiel scalaire V sachant que V tend vers 0 à l'infini.

0.3.3 Potentiel en coordonnées polaires.

Un champ de vecteurs \vec{E} dérive d'un potentiel V qui a la symétrie de révolution autour de Oz. On se place dans un plan contenant l'axe Oz (plan méridien). Dans ce plan, on adopte les coordonnées polaires et l'on pose $\theta = (z\widehat{OM})$. Le potentiel V a alors pour expression :

$$V = \frac{k}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

1. Déterminer les composantes du champ $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.
2. Calculer le flux de ce champ à travers une calotte sphérique centrée en 0, de révolution autour de Oz, et dont le rayon est "vu" du centre 0 sous l'angle α .

0.3.4 Sphère chargée en volume.

Une sphère S de centre O et de rayon R est chargée en volume avec un densité $\rho(r)$ ne dépendant que de la distance r du point considéré au centre O , donnée par la loi : $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2}\right)$, où ρ_0 et a sont des constantes.

1. Quelle est la charge dQ comprise entre deux sphères intérieures à S , centrées en O , et dont les rayons sont r et $r + dr$? Quelle est la charge totale Q de S ?
2. Quelle est la charge volumique moyenne ρ_m de S (rapport de la charge totale au volume) ?

0.3.5 Segment uniformément chargé - Champs sur les deux axes.

Un segment de droite AB , de longueur $2a$, porte une distribution continue de charges dont la densité linéaire λ est uniforme. On prend cette droite comme axe des x , l'origine O étant au milieu de AB . Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point de l'axe Ox , et en un point de l'axe Oy en dehors du segment $2a$. Que deviennent ces expressions quand x est très supérieur à a ?

0.3.6 Segment uniformément chargé.

Un segment $F'F$ de longueur $2c$ uniformément chargé porte la charge λ par unité de longueur.

1. Calculer le potentiel électrostatique V au point $M(x, y)$ distant de r_1 de F' et de r_2 de F .

On donne $\int \frac{dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}} = \text{Ln} \left(r + \sqrt{a^2+r^2} \right) + \text{Cte}$.

Exprimer le potentiel en fonction de $r_1, r_2, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2$.

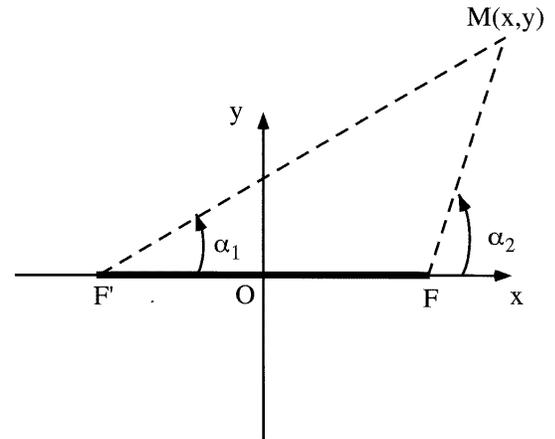
2. En utilisant les relations métriques dans le triangle quelconque :

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p \tan \frac{A}{2} = (p-b)c \tan \frac{C}{2} = (p-c)c \tan \frac{B}{2} \quad (1)$$

montrer que ce potentiel peut s' écrire $V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \text{Ln} \left(\frac{r_1+r_2+2c}{r_1+r_2-2c} \right)$.

3. Quelles sont les lignes équipotentielles de cette distribution ?
4. Dédire du Potentiel en M (exprimé en fonction de x, y, c) la valeur des composantes E_x et E_y du champ électrostatique en M .



0.3.7 Spire uniformément chargée.

Une circonférence de rayon a porte une charge q uniformément répartie.

1. Calculer directement le champ et le potentiel électrique aux divers points de l'axe Ox , normal au plan de la circonférence en son centre O . Vérifier que la relation entre champ et potentiel est satisfaite.
2. Si on appelle λ la densité linéaire de charge, exprimer le champ électrique maximum en fonction de λ et a . Graphes de $E(x)$ et $V(x)$ pour $x > 0$.
3. Dédire du résultat a) le champ électrique en un point O centre d'une demi-sphère de rayon R chargée uniformément avec une densité superficielle σ .

Application numérique : $R = 10 \text{ cm}, q = 1 \mu\text{C}$.

0.3.8 Arc de cercle uniformément chargée.

1. Un arc de cercle CC' , de centre O et de rayon R , d'angle au sommet 2α , situé dans le plan xOy , porte une charge Σ par unité de longueur, répartie uniformément. Soit Ox la bissectrice de $\widehat{COC'}$, et Oz l'axe per-

pendiculaire au plan COC' .

Calculer les composantes du champ électrique \vec{E} :

- (a) en un point M de l'axe Oz, de cote $z = OM$,
 - (b) au centre 0. En déduire les composantes de \vec{E} en M en fonction de α , du module E_0 du champ en 0 et du rapport $u = \frac{z}{R}$.
2. Déduire des résultats précédents le module du champ $E(z)$ et le potentiel électrique $V(z)$ au point M de cote z , dans le cas d'un demi-cercle.
3. En déduire :
- (a) Les composantes du champ créé par un demi-disque de centre 0, de rayon R chargé uniformément avec une densité superficielle σ , en un point M ($OM = z$) sur la normale au plan du disque.
 - (b) Le potentiel en M créé par cette répartition de charges.

N.B : On donne $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \left[x + \sqrt{a^2+x^2} \right] + Cte$.

0.3.9 Champ électrostatique créé par un anneau chargé

Un anneau filiforme (rayon 10 cm) porte une charge de $0.01 \mu C$ uniformément répartie.

1. Que vaut le champ électrique au centre de l'anneau ?
2. On supprime un morceau d'anneau de 1 cm de longueur. Que devient le champ au centre ?

0.3.10 Potentiel au centre d'un carré.

Il s'agit de déterminer le potentiel au centre 0 d'un carré ABCD, de côté a, infiniment mince, chargé avec une densité superficielle σ constante, d'axes Ox et Oy parallèles respectivement aux côtés AB et BC du carré.

1. on déterminera d'abord le potentiel créé par un segment de longueur $2l$ uniformément chargé avec une densité linéaire λ , en un point de sa médiatrice à la distance x du segment.
2. Quelle est alors la contribution au potentiel du carré en 0, d'une bande étroite parallèle à BC, d'épaisseur dx comprise entre les diagonales AC et BD.
3. En déduire l'expression exacte du potentiel du carré en son centre 0.

NB : On donne $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \text{Arcsh} \left(\frac{x}{a} \right) + Cte = \ln \left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a} \right) + Cte$.

0.3.11 Différentes sphères chargées (I).

1. Sphère creuse.

Soit une sphère creuse de rayon R , portant une charge répartie uniformément avec une densité superficielle σ .

- Calculer directement le potentiel créé par cette sphère en un point M à la distance r du centre O de la sphère ($r > R$) et en déduire le champ électrique en M . Conclusion ?
- Retrouver ces résultats par application du théorème-de Gauss.

2. Demi-sphère.

Calculer le champ électrique au centre O d'une demi-sphère creuse de rayon R , caractérisée par sa densité superficielle de charge σ constante.

3. Sphère pleine.

On considère maintenant la sphère non conductrice de centre O , de rayon R , uniformément chargée avec une densité volumique ρ positive. Déterminer le champ électrique $E(r)$ créé par la sphère pleine, en un point M ($OM = r$) :

- à l'aide des résultats de la question 1) dans le cas où $r \geq R$.
- à l'aide du théorème de Gauss dans les deux cas ($r \geq R$ et $r \leq R$).

En déduire le potentiel électrique au point M . Tracer les courbes $E(r)$ et $V(r)$ pour $0 \leq r \leq \infty$.

0.3.12 Sphère chargée (II).

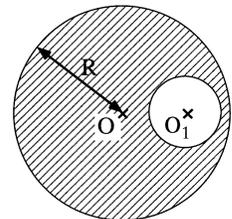
Une sphère de centre O et de rayon R est uniformément chargée en volume avec la densité volumique ρ .

- Calculer le champ à l'intérieur de la sphère, en un point M situé à la distance $r < R$ de O . Donner une forme vectorielle au résultat.
- Calculer le potentiel $V(r)$ dans les mêmes conditions. On se placera en O pour déterminer la constante du potentiel. Comment peut-on vérifier directement ce résultat ?
- A partir de l'expression de \vec{E} obtenue à la première question, calculer directement $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

0.3.13 Cavité dans une sphère chargée.

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge volumique ρ répartie uniformément dans le volume qu'elle délimite sauf dans une cavité sphérique de rayon a et de centre O_1 , creusée dans la sphère ; cette cavité est vide de charges.

Calculer le champ à l'intérieur de la cavité et souligner sa particularité.



0.3.14 Flux à travers les surfaces d'un cube.

On considère un cube de sommets A, B, C, D, E, F, G et H. On place une charge ponctuelle q au point A. Quel est le flux du champ électrique créé par la charge à travers chaque surface du cube ?

0.3.15 Plans chargés. Relations de passage.

1. Montrer que le champ créé par un plan illimité uniformément chargé avec une densité superficielle σ est : $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ au voisinage de ce plan.
2. (a) En déduire le champ électrique E en tout point d'un axe $x'x$ perpendiculaire à deux plans Π_1 et Π_2 parallèles, distants de $2e$, sachant que seul le volume compris entre ces plans est chargé avec une densité volumique ρ positive et constante. Le plan médian Π_0 coupe l'axe $x'x$ en 0 qu'on prendra comme origine des abscisses.
(b) Retrouver $\vec{E}(x)$ à partir du théorème de Gauss.
(c) Calculer le potentiel $V(x)$ en tout point de $x'Ox$, en supposant $V(O) = 0$.
(d) Courbes $E(x)$ et $V(x)$?
3. On admet maintenant que le volume compris entre Π_1 et Π_2 est chargé avec une densité volumique $\rho(x) = \rho_0(1 - 3ax^2)$. A partir de l'équation locale de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, déterminer le champ électrique $E(x)$ en tout point de l'axe $x'Ox$.

0.3.16 Faisceau de particules chargées.

A l'intérieur d'un cylindre indéfini, d'axe $z'z$, de rayon R , se trouve un faisceau de particules chargées réparties avec une densité volumique de charge ρ .

1. Déterminer le module du champ électrique $E(r)$ en un point intérieur et en un point extérieur au faisceau cylindrique, dans les deux hypothèses :
(a) $\rho = Cte = \rho_0$.
(b) $\rho = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$.
2. Tracer sur un même graphe les courbes $E(r)$ dans les deux cas.
3. En déduire le champ $E(r)$ créé par un conducteur filiforme indéfini, uniformément électrisé avec une densité linéaire λ .

On considère maintenant le faisceau de particules chargées, réparties uniformément avec une densité volumique de charge ρ_0 , entre deux cylindres de même axe $z'z$ et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

1. (a) Calculer le champ électrique $E(r)$ en un point M à la distance r de l'axe $z'z$, r variant de 0 à l'infini.

- (b) En déduire le champ créé en un point M par un tube cylindrique, de rayon R uniformément électrisé avec une densité surfacique σ .
2. Calculer le potentiel $V(r)$ en M ($O < r < +\infty$); on prendra égal zéro à le potentiel en un point 0 de l'axe.

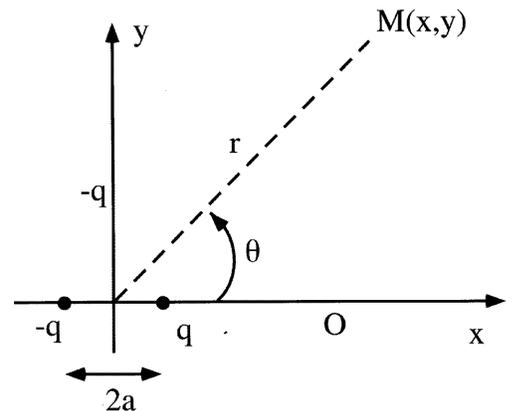
0.3.17 Pinceau d'électron.

Un pinceau d'électron se déplace à la vitesse $v = 3.10^6$ m/s créant un courant $I = 1 \mu\text{A}$.

- Combien passe-t-il d'électrons par seconde à travers la section du faisceau ?
- Quelle est la densité d'électrons à l'intérieur de ce faisceau de 10 mm^2 ?

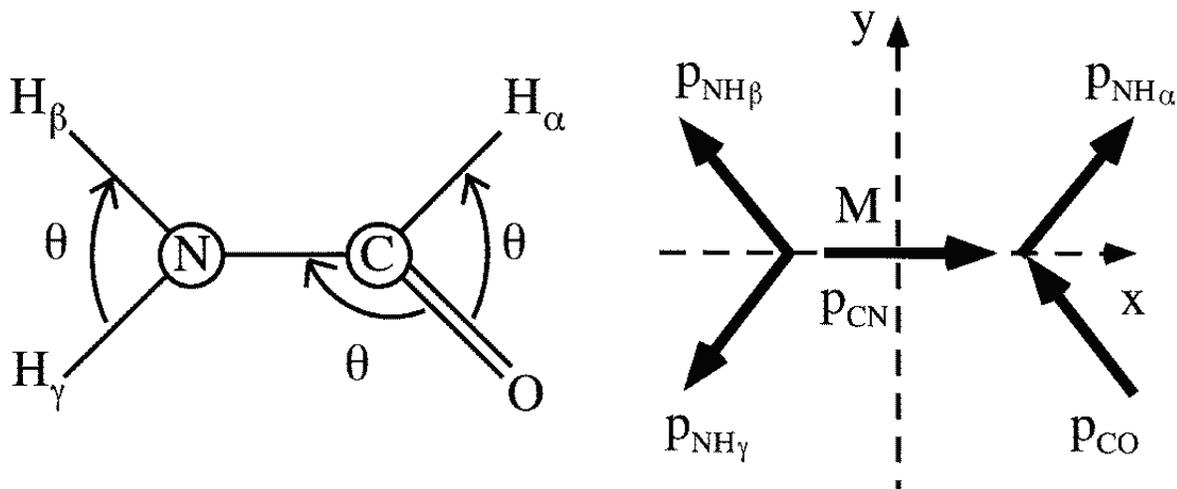
0.3.18 Dipôle électrique.

- Calculer le potentiel au point M ($OM = r$) créé par les 2 charges $+q$ et $-q$ placées sur l'axe des x, symétriquement par rapport à O et distantes de a ($a \ll r$).
- Calculer les composantes radiales (selon r) et tangentielle (selon la direction perpendiculaire à r) du champ au point M.
- Dans un champ électrique \vec{E}_0 uniforme parallèle à l'axe Oy on place en O où le potentiel est V_0 un dipole électrique de moment \vec{m} dont l'axe est parallèle et de même sens et que \vec{E}_0 et $O\vec{y}$.
 - Trouver l'expression du potentiel $V(M)$ résultant de ce système en un point $M(r, \theta)$.
 - Déterminer les équations des équipotentielles $V = V_0$ du système.
 - Trouver les expressions du champ \vec{E} résultant de ce système en $M(r, \theta)$. Calculer le champ \vec{E} sur les équipotentielles trouvées en b.



0.3.19 Dipole électrique.

On considère une molécule de formamide. Cette molécule est plane, les angles (θ) entre les différentes liaisons sont de 120° . Les directions des différents moments sont indiquées sur la figure.



1. Donner en fonction des moments dipolaires des liaisons les composants p_x et p_y suivant M_x et M_y du moment dipolaire de la molécule (M est le milieu de liaison CN).
2. Calculer p et l'angle α de p avec M_x .

Application numérique :

$$\begin{aligned}
 p(CO) &= 0.83 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}, & p(CN) &= 0.07 \cdot 10^{-29} \text{ C.m} \\
 p(CH_\alpha) &= 0.1 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}, & p(NH_\beta) &= p(NH_\gamma) = 0.44 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}
 \end{aligned}$$

0.3.20 Molécule d'eau.

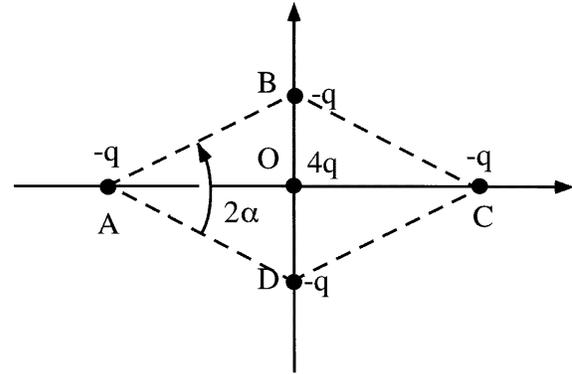
Une molécule d'eau peut être considérée, en première approximation, comme un ion O^{2-} et deux ions H^+ formant un angle de 105° . Sachant que le moment dipolaire de la molécule d'eau est $p_R = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$, calculer la distance d entre O^{2-} et un ion H^+ en considérant les charges des ions comme ponctuelles. Préciser la direction et le sens de p_R .

La distance réelle entre le noyau de l'atome d'oxygène et celui d'un atome d'hydrogène dans la molécule d'eau étant environ 1 \AA , comment expliquer le résultat obtenu ?

0.4 ENERGIE ELECTROSTATIQUE.

0.4.1 Charges sur un losange.

On considère la distribution plane de charges ponctuelles représentée par la figure. Le quadrilatère ABCD est un losange de côté a et d'angle aigu au sommet 2α . A chaque sommet se trouve la charge $-q$, au centre O , la charge $+4q$.



1. Calculer en fonction de α l'énergie électrostatique $W(\alpha)$ de la distribution.
2. Représenter $W(\alpha)$ en fonction de b entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Constatation et conclusion ?

0.4.2 Travail de la force électrique (I).

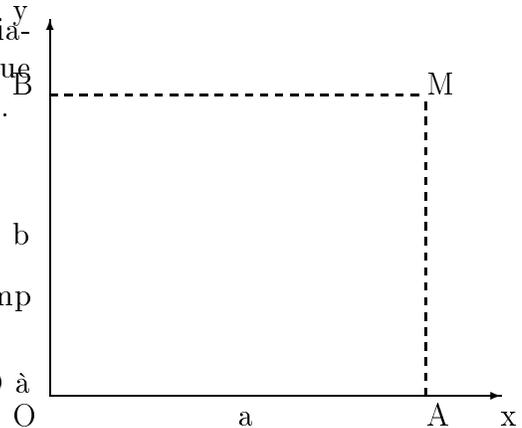
Un champ électrique \vec{E} est défini par ses composantes : $E_x = 6xy$ et $E_y = 3x^2 - 3y^2$

1. Calculer, sur les chemins OAM, OBM et OM (diagonale du rectangle) le travail de la force électrique appliquée à une charge q ($a = OA$ et $b = OB$).
2. On connaît une fonction potentiel :

$$V = f(x, y) = -3x^2y + y^3 + V_0$$

où V_0 est une constante. Calculer le vecteur champ électrique \vec{E} .

3. Retrouver le travail de la force électrique de O à M à partir du potentiel.

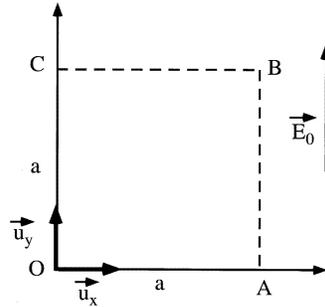


0.4.3 Travail de la force électrique (II).

Une charge électrique ponctuelle q se déplace dans un plan Oxy où règne un champ électrique uniforme \vec{E}_0 dirigé selon Oy (voir schéma).

1. Calculer le travail W de la force électrique agissant sur la charge q lorsque celle-ci effectue différents déplacements repérés sur la figure ci-contre :

- sur le trajet AB
 - sur le trajet ABC
 - sur le trajet AC
- Que vérifiez-vous ?



2. Définir les lignes équipotentiels correspondant à un champ électrique \vec{E}_0 (on appelle V_A et V_B les équipotentiels respectivement par le point A et le point B).
3. Retrouver les résultats de la question 1. à partir des valeurs de l'énergie potentielle électrique E_P de la charge q aux différents points du plan.

0.4.4 Charges sur un cube.

Calculer l'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles constitué de 8 charges (-e) (électrons) situées aux sommets d'un cube de côté a et d'une charge (+2e) située au centre du cube.

0.4.5 Energie potentielle d'une sphère - Fission d'un atome.

Une sphère de rayon a porte une densité de charge électrique volumique uniforme ρ . On veut déterminer l'énergie potentielle de cette sphère chargée, c'est-à-dire le travail nécessaire pour établir cette distribution de charge.

1. Calculez la en construisant la sphère couche par couche, en utilisant le fait que le champ à l'extérieur d'une distribution sphérique de charge est le même que si toute la charge était concentrée au centre.
 Supposez que la sphère a atteint un rayon r. Quelle est sa charge totale q à cet instant ? Ajoutez ensuite une couche infinitésimale d'épaisseur dr. Quel travail dU doit-on fournir pour apporter de l'infini au rayon r la quantité de charge contenue dans cette couche ?
 Intégrez alors de r = 0 à r = a. Exprimez le résultat en fonction de la charge totale Q de la sphère.
2. Calculez l'énergie potentielle de la sphère en intégrant $\frac{1}{2}\rho V d\tau$, où dτ est l'élément de volume élémentaire.
3. Retrouvez cette énergie en sommant sur tout l'espace la densité d'énergie électrostatique exprimée en fonction de E.
4. On suppose que le noyau d'uranium ($Z = 92$, $a = 9.10^{-15}$ m), assimilé à une sphère uniformément chargée en volume, subit une fission symétrique en 2 noyaux de numéro atomique $Z = 46$, de volume égal à la

moitié de celui du noyau initial.

Quelle est la quantité d'énergie libérée au cours de la fission ?

Application numérique : $W_i = 810 \text{ MeV}$.

0.4.6 Densité de charges non uniforme.

L'espace compris entre 2 sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) est chargé avec une densité volumique :

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

1. Déterminer la charge totale, le potentiel et le champ électrique de cette distribution.
2. Calculer l'énergie électrostatique de cette distribution.

0.4.7 Energie d'interaction entre deux molécules d'eau.

1. Calculer la distance moyenne entre deux molécules d'eau à l'état liquide.
2. Soit deux molécules d'eau séparées par la distance moyenne d calculée ci-dessus et dont les moments dipolaires ($p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$) ont la même direction et le même sens. Calculer l'énergie d'interaction entre les molécules ; la force est-elle attractive ou répulsive ?
3. La chaleur latente de vaporisation de l'eau à 20°C est 2445 Joules/g . Conclusions ?

0.4.8 Energie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique.

Deux charges ponctuelles, égales et de même signe sont placés en deux points A et B d'un axe Ox tels que : $OA = OB = d$.

1. Calculer et représenter le champ électrique créé en un point C placé sur la médiatrice de AB (axe Oy) en fonction de d et de l'angle $\alpha = \widehat{AB, AC}$.
2. Montrer que ce champ présente un maximum en un point que l'on appellera C_1 . Déterminer l'angle α correspondant. Calculer l'intensité du champ en ce point et en C tel que $\alpha = 60^\circ$.

Application numérique : $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $d = 15 \text{ \AA}$.

3. On place un dipôle de moment \vec{p} en un point M de l'axe Oy. Ce dipôle est orienté de façon quelconque et peut tourner librement autour de son axe.

Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ électrique extérieur créé par les deux charges $+q$. Quelles

sont les positions d'équilibres? Calculer, en eV, l'énergie potentielle lorsque le point M est en C_1 . *Application numérique* : $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ C.m

4. Décrire et expliquer l'effet de ce champ sur le dipôle selon sa position. On traitera les cas particuliers où le dipôle est en O, au point C_1 , entre O et C_1 et entre C_1 et l'infini.

0.5 CONDUCTEURS

0.5.1 Sphères métalliques.

1. On charge une sphère métallique S_1 de rayon $R = 9$ cm avec une charge positive $Q = 10^{-8}C$. Quels sont la distribution des charges, le potentiel et la capacité de S_1 ?
2. On relie S_1 par un fil conducteur long et fin à une petite sphère métallique S_2 de rayon $r = 1$ cm qu'on suppose assez éloignée pour négliger l'influence mutuelle de S_1 et S_2 et ne portant initialement aucune charge. Les charges superficielles sur un fil fin qui relie deux conducteurs massifs sont toujours négligeables. Quelle est la nouvelle distribution des charges et la valeur du champ électrique au voisinage de chaque sphère ?

Conclusion ?

0.5.2 Système sphère-pendule

Une sphère conductrice S de 50 cm de rayon, portant la charge Q_0 est mise en communication lointaine par un fil conducteur long et fin avec un double pendule dont les fils conducteurs ont 8 cm de longueur et dont les boules sphériques conductrices électriquement neutres initialement, ont 1 cm de diamètre et pèsent chacune 0.2 g.

Calculer la charge Q_0 de S lorsque l'écart angulaire α entre les fils du pendule est égal à $\alpha = 20^\circ$.

0.5.3 Sphères conductrices chargées (I).

Une sphère conductrice pleine B de rayon R et de centre O est entourée d'une sphère conductrice B' creuse concentrique de rayon intérieur R_i et extérieur R_e ($R < R_i < R_e$).

1. Les sphères B et B' portent respectivement des charges Q_1 et Q'_2 .
Comment sont réparties ces charges sur ces conducteurs ?
Calculer le champ électrique à une distance r quelconque du centre O .
Calculer les potentiels V_1 et V'_1 des 2 sphères en fonction des charges Q_1 et Q'_1 et des rayons.
2. On réunit électriquement B et B' . Que deviennent les charges, les champs et les potentiels ?
3. On revient à la première situation (sphères isolées portant Q_1 et Q'_1) puis on relie B' au sol. Décrire la nouvelle répartition des charges et calculer le nouveau potentiel de B . Que devient le champ électrique ?

0.5.4 Sphères conductrices chargées (II).

Une sphère conductrice S de rayon $R = 6$ cm est portée au potentiel $V = 33000$ V puis isolée de la source.

1. On l'entoure d'une sphère creuse S' de rayons $R_i = 11$ cm et $R_e = 12$ cm initialement neutre. Calculer le potentiel V_1 de S .
2. On met alors S' à la terre. Calculer le nouveau potentiel V_2 de S .
3. On isole ensuite S' et on met S au sol. Calculer le potentiel V_3' de S' .

0.5.5 Coefficients d'influence mutuelle.

Les capacités de deux conducteurs sont C_1 et C_2 lorsqu'ils sont séparés et isolés dans l'espace. On les met en influence mutuelle, à une distance r l'un de l'autre, telle que r soit grand devant les dimensions linéaires des conducteurs. Calculer en fonction de C_1 , C_2 et r les coefficients C_{ij} de ce système.

0.5.6 Système de conducteurs cylindriques

1. Deux conducteurs cylindriques coaxiaux (rayons intérieur a et b , $a < b$) très longs constituent les deux armatures d'un condensateur entre lesquelles on applique une différence de potentiel V . Quelle est la distribution du champ? Calculer la capacité par unité de longueur de ce condensateur en fonction de a et b , loin des bords.
2. Quand a est très voisin de b , retrouver la formule donnant la capacité du condensateur plan.

0.5.7 Condensateurs en parallèles.

On charge un condensateur dont la capacité est $C_1 = 0.1\mu F$ en créant entre ses armatures une différence de potentiel de 1000 volts. On l'isole de la source et on le relie en parallèle avec un autre condensateur de capacité $C_2 = 0.2\mu F$.

Calculer la différence de potentiel aux bornes du système et la charge de chaque condensateur.

0.5.8 Condensateur plan.

Un condensateur plan est mis en communication avec une source créant entre les armatures une différence de potentiel V . Calculer V sachant que les plateaux, distants de 1 cm ont une surface de 1 m^2 et s'attirent avec une force de $F = 1\text{ N}$.

0.5.9 Système de charges ponctuelles.

On suppose que des charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n réparties sur n conducteurs en influence mutuelle correspondent aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_n tandis que des charges Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n sur les mêmes conducteurs produisent des potentiels V'_1, V'_2, \dots, V'_n .

Démontrer la relation suivante, appelée également *théorème de réciprocité de Green* (ou *identité de Gauss*) :

$$\sum_{i=1}^n Q_i V'_i = \sum_{i=1}^n Q'_i V_i \quad (2)$$

0.5.10 Influence mutuelle.

Calculer la charge Q qui apparait par influence d'une charge ponctuelle q en P sur un conducteur relié au sol, si on connaît le potentiel V_p produit au point P , la charge étant absente, par le conducteur porté au potentiel V' .

Application : Calculer la charge induite Q sur une sphère conductrice de rayon a , reliée au sol, par une charge ponctuelle q située à la distance D du centre de la sphère.

0.5.11 Système de plans conducteurs

Calculer les charges apparues sur deux plans conducteurs Π_1 et Π_2 maintenus au potentiel zéro (reliés au sol), parallèles et distants de d sous l'influence d'une charge ponctuelle q située à la distance d_1 de Π_1 .

0.5.12 Charges induites.

Une surface conductrice fermée au potentiel V_1 contient un conducteur au potentiel V_0 . Dans ces conditions, un certain point A de l'espace compris entre les 2 conducteurs se trouve au potentiel V_A . Les deux conducteurs sont alors mis à la terre et une charge q est placée au point A .

Trouver les charges induites sur les conducteurs.

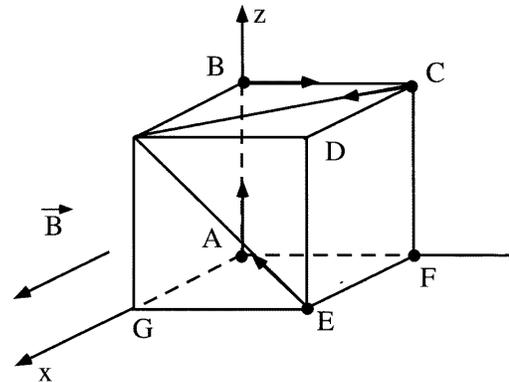
0.6 INTERACTION MAGNETOSTATIQUE

0.6.1 Modèle de conduction dans les métaux.

1. Un électron de masse m_e , de charge e , se déplace dans le vide sous l'action d'un champ électrique \vec{E} . Calculer sa vitesse et son accélération (on suppose qu'à $t = 0$ l'électron est au repos).
2. L'électron se déplace maintenant dans un solide soumis à un champ électrique \vec{E} . Les diverses forces de *frottement* sont modélisées par $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ (analogie avec la résistance de l'air). Ecrire l'équation du mouvement.
3. Sans résoudre l'équation différentielle, montrer qu'il existe une vitesse limite qu'on peut mettre sous la forme $\vec{v}_l = \mu\vec{E}$. Quelles sont les dimensions de μ et τ ?
4. Intégrer l'équation différentielle du mouvement. On suppose qu'à $t = 0$ on a $\vec{v} = 0$.
5. Quelle est la signification physique de τ ?
6. On suppose que le régime permanent est établi (vitesse limite atteinte); montrer que la densité de courant \vec{j} peut s'écrire $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (loi d'Ohm microscopique) où σ est appelée conductivité électrique et $\rho = \frac{1}{\sigma}$ résistivité.
7. *Applications numérique* : sachant que pour le cuivre $\sigma = 6.10^5 \Omega.cm^{-1}$ et que la densité des électrons libre est $n = 8,5.10^{22}$ électrons/cm³, calculer μ . En déduire τ . Calculer la vitesse des électrons dans un champ de $10^4 V.cm^{-1}$.

0.6.2 Charges en mouvement sur un cube.

Chaque point A, B, C, D, E, F du cube de la figure représente une charge positive q se déplaçant à la vitesse v dans les directions indiquées. Ces charges sont soumises à un champ magnétique uniforme B dirigé suivant l'axe Ox . Quelles sont la grandeur et la direction de la force subie par chaque charge. Pour simplifier le problème, on ne considèrera pas d'interaction (on remarquera qu'on a en fait 6 exercices différents).



0.6.3 Champ magnétique créé par un électron.

Abandonné sans vitesse initiale, un électron est soumis à un champ électrique uniforme E , $E = 10^5 V.m^{-1}$ dans lequel il parcourt 10 cm.

1. Quel champ magnétique \vec{B} crée-t-il alors en un point du plan perpendiculaire à sa vitesse, passant par la position qu'il occupe à cet instant et situé à 1 mm de cette position instantanée ?
2. Combien vaut le champ électrique créé par la particule au même point ?

0.6.4 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, un électron décrit un cercle de rayon $a_0 = 0,52 \text{ \AA}$, d'un mouvement uniforme autour d'un proton. L'énergie cinétique de l'électron vaut $E_0 = 1 \text{ Ryd}$ (1 Rydberg = 13,6 eV). Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique \vec{B} créé par l'électron en mouvement au niveau du proton ?

0.6.5 Fil infini.

Soit un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant d'intensité I .

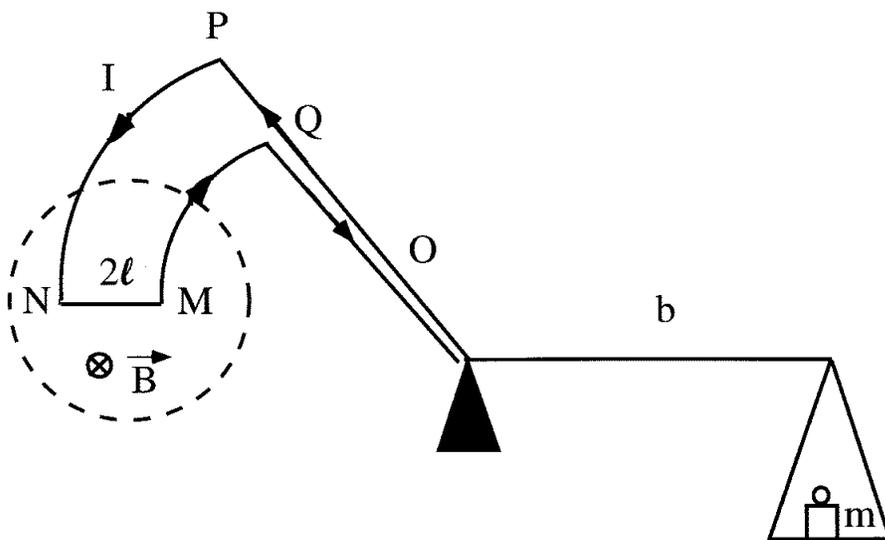
1. Quel champ magnétique \vec{B} crée-t-il au point M qui en est distant de $MH = a$?
2. Quel est le champ si le fil a une longueur finie ?

0.6.6 Interaction entre deux fils infinis.

Calculer la force (sa différentielle) qui s'exerce entre deux fils conducteurs parallèles indéfinis distants de a , parcourus par des courants I et I' de même sens.

Application Numérique : $I = I'$, $a = 1 \text{ m}$; $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$; Calculer I .

0.6.7 Balance de Cotton.



Une balance de Cotton est schématisée ci-dessous. O est un couteau horizontal autour duquel pivote un fléau ; à l'un des bras en R est accroché un plateau où l'on peut poser des poids. L'autre bras comporte 2 arcs de cercle centrés en O portant un fil conducteur dans lequel peut passer un courant I .

Un champ magnétique \vec{B} uniforme parallèle au couteau règne dans la région où se trouve la portion rectiligne MN du circuit électrique. \vec{B} produit une force \vec{F} sur MN .

1. Quelle masse m faut-il placer dans le plateau pour assurer l'équilibre ?
2. *Application Numérique* : $I = 5A$, $a = b = 50$ cm, $l = 1$ cm, $g = 10$ m.s⁻², $B = 5\,000$ Gauss.

0.6.8 Spire circulaire.

Calculer le champ magnétique créé par une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité I en un point M de son axe situé à une distance x de O .

0.6.9 Spire carrée.

Soit une spire carrée de côté $2a$ et de centre O parcourue par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétique créé en un point M de son axe, situé à la distance x de O .

0.6.10 Solénoïde fini.

1. Calculer le champ magnétique \vec{B} créé par un solénoïde de longueur finie comptant N spires par unité de longueur parcouru par un courant d'intensité I en un point M de son axe. On l'exprimera en fonction des angles θ_1 et θ_2 , demi-angles au sommet des cônes sous lesquels de M on voit les bases du solénoïde.
2. Etudier le cas du solénoïde infini.

0.6.11 Courant sur une sphère.

Calculer le champ magnétique au centre d'une sphère de rayon R recouverte d'un grand nombre N de spires, jointives, d'un fil parcouru par un courant d'intensité I .

0.6.12 Cylindre infini.

Un fil cylindrique rectiligne indéfini de rayon a transporte un courant d'intensité I tel que la densité de courant \vec{j} soit uniforme dans le fil et parallèle à son axe Δ que l'on prendra pour Oz .

1. Etablir la relation entre \vec{j} et I .

2. Déterminer le champ magnétique \vec{B} créé en tout point M de l'espace intérieur ou extérieur au fil en utilisant le théorème d'Ampère.

0.6.13 Cylindres coaxiaux.

Un conducteur cylindrique indéfini, d'axe Δ et de rayon R_1 transporte un courant de densité uniforme et d'intensité I . Le retour de ce courant est assuré par un tube cylindrique d'axe Δ et de rayons R_2 et R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) dans lequel la densité de courant est également uniforme. Décrire le champ magnétique créé par ce système.

0.6.14 Conducteur cylindrique.

Un conducteur rectiligne indéfini est formé par l'espace compris entre deux cylindres circulaires de rayons R_1 et R_2 , d'axes parallèles et distants de d , $R_1 > R_2, d < R_2 - R_1$. Il est parcouru par un courant I uniformément réparti. Calculer le champ magnétique à l'intérieur de la cavité.

0.6.15 Fil de longueur finie.

Soit un petit fil conducteur de longueur l , de section a , situé à l'origine O d'un système d'axes, sur Oz de $-l/2$ à $l/2$, dans l'air, parcouru vers les $z > 0$ par une densité de courant \vec{j} constante et uniforme.

Calculer le champ magnétique \vec{B} créé à grande distance du fil à partir du potentiel vecteur.

0.6.16 Potentiel vecteur d'un conducteur cylindrique.

Calculer à partir du champ magnétique \vec{B} , le potentiel vecteur \vec{A} à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre plein indéfini de rayon a et parcouru par un courant de densité \vec{j} uniforme parallèle à son axe Oz . On prendra $\vec{A} = 0$ sur l'axe.

0.6.17 Moment magnétique d'une sphère en rotation.

Calculer le moment magnétique \vec{m} associé à une sphère chargée en rotation uniforme autour d'un de ses diamètres à la vitesse angulaire ω .

1. dans le cas d'une densité de charge uniforme en surface σ .
2. dans le cas d'une densité de charge uniforme en volume ρ .

0.7 Examen septembre 2008

A. Selon le modèle atomique de Bohr, l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron, de charge électrique $-e$ et de masse m , décrivant une orbite circulaire de rayon R autour du proton de charge électrique e .

(A1) Déterminer la fréquence de rotation ν de l'électron autour du proton. L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme est $\gamma = v^2/R$, où v est la vitesse de l'électron.

(A2) On place un tel atome dans un champ magnétique (on suppose que la force magnétique exercée sur l'électron est beaucoup plus faible que la force électrique), le plan de l'orbite de l'électron étant normal au vecteur induction magnétique \vec{B} . On suppose que le rayon R de l'orbite ne change pas. Si l'électron tourne dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur qui regarde dans le sens du champ, la fréquence de rotation augmente ou diminue-t-elle? Justifier votre réponse.

(A3) Que se produit-il si l'électron tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre? Justifier votre réponse.

(A4a) Montrer que la variation de la fréquence de rotation produite par la présence du champ magnétique est donnée par $\Delta\nu = \pm \frac{Bc}{4\pi m}$. Ces décalages de fréquence ont été observés pour la première fois en 1896 par Zeeman (effet Zeeman).

(A4b) Calculer numériquement $\Delta\nu/\nu$.

A.N : On donne $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C; $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; $B = 0.1$ T; $R = 0.53 \times 10^{-10}$ m.

B. Quelques années après le modèle de Bohr, la théorie quantique établie que la charge électronique d'un atome d'hydrogène dans l'état fondamental est distribuée dans tout l'espace avec une densité $\rho_e(r) = Ae^{-2r/R}$ où r est la distance au proton, A est une constante et R est le rayon de Bohr ($R = 0.53 \times 10^{-10}$ m).

(B1) Déterminer la constante A . On donne : $\int r^2 e^{-r} dr = -(r^2 + 2r + 2)e^{-r} + \text{constante}$.

(B2) Utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique produit par le proton et la distribution de la charge de l'électron.

(B3) Dédurre le potentiel V et discuter les cas où $r/R \ll 1$ et $r/R \gg 1$.

C. Soit un condensateur plan; la superficie de ses armatures est S et leur écartement, d .

(C1) Etablir l'expression de la capacité de ce condensateur (on suppose que $S \gg d$).

(C2) On charge ce condensateur jusqu'à une différence de potentiel V . On débranche ensuite la pile de charge et on éloigne les armatures de sorte que leur écartement soit $2d$. Établir en fonction de S , de d , et du potentiel initial V : (a) la nouvelle différence de potentiel, (b) l'énergie emmagasinée au départ et à la fin, et (c) le travail qu'il a fallu fournir pour séparer les armatures.

A.N : On donne $S = 10$ cm², $d = 1$ mm, $V = 100$ V, $q = 0.01$ C et $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

0.8 Examen janvier 2009

0.9 Formulaire

0.9.1 Gradient

Coordonnées cartésiennes $M(x, y, z) : \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$.

Coordonnées cylindriques $M(\rho, \phi, z) : \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$.

Coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi) : \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$.

0.9.2 Divergence

Coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées cylindriques : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées sphériques : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$.

0.9.3 Rotationnel

Coordonnées cartésiennes :

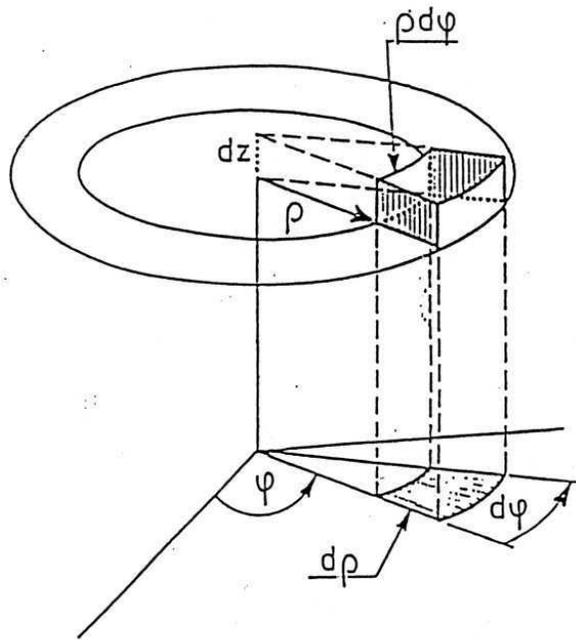
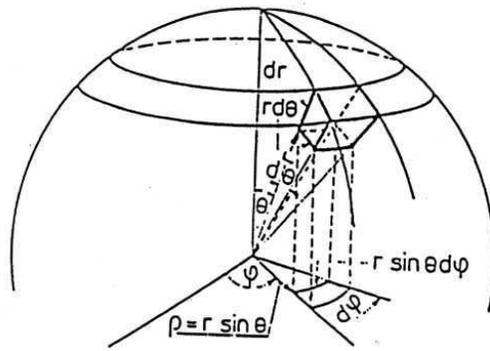
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{k}.$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$



Schémas des coordonnées sphériques (haut de page) et cylindriques (bas de page) pour comprendre le formulaire 10. Pour une animation des coordonnées sphériques voir le site suivant :

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/Spheriques.html>