6ème Chapitre

ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

1.1 Transformation de jauges

1.2 Jauge de Coulomb et Jauge de Lorentz

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MVT EN ELETROMAGNETISME

2.1 Introduction

2.2 Théorème de Poynting

2.3 Tenseur de contraintes de Maxwell

2.4 Conservation de la quantité de mouvement

2.5 Conclusion

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

1.1 Potentiel scalaire et potentiel vecteur

En électrostatique $\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$ nous a permis d'écrire $\vec{E} = -\nabla V$.
En électrodynamique ceci n'est plus possible car $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

En ce qui concerne le champ magnétique, nous avons toujours $\nabla \vec{B} = \vec{0}$ (absence de charges magnétiques).
On peut alors chercher un potentiel vecteur $\vec{A}$ qui permettra de déterminer le champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Par substitution dans la loi de Faraday, on obtient :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \nabla \times \vec{A}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \ \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

On peut donc écrire que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

La deuxième $\nabla\vec{B}=\vec{0}$ et troisième $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ lois de Maxwell vérifient automatiquement ces deux équations.

Ecrivons l'équation de Gauss en formulation potentielle :

$$\nabla^2 V+\frac{\partial\,\nabla\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

cette équation remplace **l'équation de Poisson**.

L'équation d'Ampère-Maxwell devient :

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu_0\,\vec{J}-\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Nous développons le rotationnel du rotationnel du potentiel vecteur et nous obtenons :

$$\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\,\vec{J}-\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\ \nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\,\vec{J}$$

Les équations de Gauss et d'Ampère-Maxwell, en formulation potentielle, sont très difficiles à résoudre

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

2. Transformation de Jauges :

Les équations de Gauss et d'Ampère-Maxwell, en formulation potentielle, sont très difficiles à résoudre. Nous avons tout de même réduit un système d'équations à **6 composantes** à un système d'équations à **4 composantes** (1 pour V et 3 pour $\vec{A}$). En plus la **représentation potentielle n'est pas unique**, nous pouvons choisir une représentation adéquate pour simplifier d'avantage ces équations.

Nous pouvons trouver deux couples de potentiels $(V, \vec{A})$ et $(V', \vec{A}')$ qui correspondent aux mêmes champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Il suffit de poser : $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{X}$ et $V' = V + y$

Il faut maintenant déterminer le vecteur $\vec{X}$ et le scalaire y :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} \quad \Rightarrow \nabla \times \vec{X} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{X} = \nabla \xi$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad \text{et} \quad \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla V' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \nabla V - \nabla y = \vec{E} - \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \nabla y$$

et comme $\vec{E}' = \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla y + \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{0}$

Nous allons donc résoudre l'équation suivante : $$\nabla \left(\underbrace{y + \frac{\partial \xi}{\partial t}}_{M} \right) = \vec{0}$$

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

La fonction M est indépendante de la position (x,y,z) mais peut dépendre du temps (t).
Nous pouvons donc écrire :

$$y + \frac{\partial \xi}{\partial t} = f(t) \Rightarrow y = -\frac{\partial \xi}{\partial t} + f(t)$$

On peut absorber $f(t)$ dans $\xi(t)$ en redéfinissant un nouveau $\xi(t)$ tel que :

$$\xi(t) = \xi_{ancien}(t) + \int_0^t f(t')dt'$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \xi \\ V' = V - \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \end{cases}$$

Conclusion : Quelque soit ξ, on peut ajouter $\nabla \xi$ à $\vec{A}$ et en même temps soustraire $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ de V sans changer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

1. FORMULATION POTENTIELS DE L'ELECTROMAGNETISME

Les transformations de V et $\vec{A}$ sont appelées transformations de jauges.
Ces transformations peuvent être utilisées pour simplifier les équations de Gauss et Ampère-Maxwell en formulation potentielle.

En électrostatique nous avions utilisé la jauge de Coulomb $\nabla \vec{A} = 0.$
En électrodynamique le problème n'est pas si simple et le choix de la transformation de jauge dépend souvent du problème à résoudre.

1.2 Jauge de Coulomb et Jauge de Lorentz :

1.2.1 Jauge de Coulomb

En utilisant la **Jauge de Coulomb** $\nabla \vec{A} = 0$ l'équation de Gauss devient :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

de solution formelle

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} d^3 r'$$

Par contre l'équation d'Ampère-Maxwell reste toujours compliquée :

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

et par conséquent le potentiel vecteur $\vec{A}$ est très difficile à calculer.

Attention, ***V*** seul ne permet pas de déterminer $\vec{E}$ comme en électrostatique. Nous avons besoin de $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ car $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$. Bien que ***V*** ne soit pas causal dans la jauge de Coulomb, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ l'est bien ! C'est-à-dire la détermination de $\vec{E}$ à l'instant ***t*** dépend de la variation de $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ aux instants ultérieurs.

1.2.2 Jauge de Lorentz :

Le choix de Lorentz est de poser : $\nabla\vec{A} = -\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial V}{\partial t}$

En utilisant ce choix de jauge, les équations de Gauss et d'Ampère-Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

On pose $\square^2 \overset{déf}{\equiv} \nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ($\square^2$ est l'opérateur d'Alembertien).

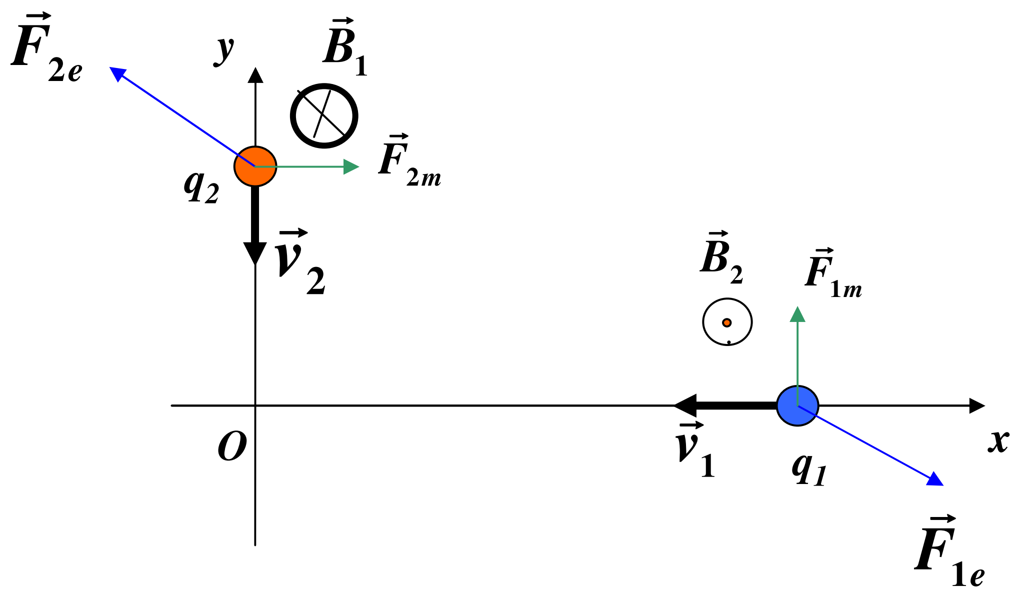
Les équations des potentiels deviennent :

$$\begin{cases} \square^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Conclusion *:* En utilisant la jauge de Lorentz, nous traitons V et $\vec{A}$ de la même façon. C'est le meilleur choix pour faire l'électrodynamique !

2.1 Introduction

On montre que deux particules en mouvement et en interaction ne vérifient pas le troisième principe de la dynamique (le principe de l'action réaction) si on ne tient pas compte de la quantité de mouvement portée par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.



Le champ magnétique B_1 créé par la particule q_1 rentre dans la feuille (représenté par une croix) et le champ B_2 créé par la particule q_2 est sortant (représenté par le bout d'une flèche).
Les forces électriques F_{1e} et F_{2e} sont opposées mais les forces magnétiques F_{1m} et F_{2m} ne le sont pas
➔ la résultante des forces sur la particule 1 n'est pas égale à la résultante des forces sur la particule 2.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

En effet :

$$\vec{F}_{1R} = \vec{F}_{1e} + \vec{F}_{1m}$$
$$\vec{F}_{2R} = \vec{F}_{2e} + \vec{F}_{2m}$$

et on montre facilement que

$$\vec{F}_{1R} + \vec{F}_{2R} \neq \vec{0}$$

Ceci est contraire au principe de l'action réaction qui stipule que la somme des forces exercées sur un système isolé est nulle. On déduit que les champs magnétique et électrique emmagasinent de la quantité de mouvement.

Nous allons montrer qu'en électrodynamique, **l'énergie est conservée**. Ceci nous permettra de déterminer les expressions de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment angulaire emmagasinées dans les champs électromagnétiques

2.2 Théorème de Poynting

Nous avons montré que l'énergie électrostatique pour rassembler les charges est

$$W_E = \frac{1}{2}\iiint_D V\rho d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{espace} \vec{E}^2 d\tau$$

et l'énergie pour lutter contre l'autoinduction est

$$W_B = \frac{1}{2}\iiint_D \vec{A}\vec{J} d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_{espace} \vec{B}^2 d\tau$$

L'énergie totale emmagasinée dans les champs, i.e., dans le système est

$$W_{EB} = \frac{1}{2}\iiint_{espace}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right) d\tau$$

Nous allons montrer la **conservations de l'énergie électromagnétique** d'un ensemble de charges en mouvement.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

On suppose qu'un ensemble de charges en mouvement produit un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ à l'instant ***t***. A l'instant ***t+dt*** l'ensemble des charges se déplacent.

On peut se demander quel est le travail produit par les forces électromagnétiques sur ces charges en un temps ***dt***.

Le travail produit sur une charge ***dq*** est:

$$\delta W = \vec{F}d\vec{l} = dq\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v}dt = dq\vec{E}\vec{v}dt = \vec{E}\vec{J}\,d\tau\,dt \quad \text{car} \quad dq = \rho d\tau \text{ et } \vec{J} = \rho\vec{v}$$

Le travail effectué par unité de temps sur toutes les charges électriques en mouvement est :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_D \vec{E}\vec{J}d\tau$$

On exprime la puissance $\vec{E}\vec{J}$ en fonction des champs et en utilisant la loi d'Ampère-Maxwell :

$$\vec{E}\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Pour faire une intégration par partie on utilise l'identité suivante:

$$\nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\left(\nabla \times \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

La puissance devient :

$$\vec{E}\vec{J} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{\nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\mu_0} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} - \frac{\nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\mu_0}$$

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Le théorème de **Poynting** s'écrit alors :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_D \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint\!\!\oint_\Sigma \left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\vec{S}$$

Le premier terme représente la variation de l'énergie totale emmagasinée dans le domaine ***D*,** et le second le taux de variation de l'énergie transportée en dehors de ce domaine ***D***.

Théorème de Poynting :

Le travail effectué par les forces électromagnétiques sur les charges électriques en mouvement est **égal à la réduction de l'énergie emmagasinée dans le champ électromagnétique moins l'énergie transportée en dehors du volume du domaine *D*.**

L'énergie transportée par le champ électromagnétique par unité de surface et par unité de temps est appelée le **vecteur de Poynting** $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

Le flux d'énergie $\vec{S}\,d\vec{S}$ est l'énergie transportée à travers l'élément de surface $d\vec{S}$; et $\vec{S}$ est la densité de flux d'énergie.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Soit $w_M = \vec{E}\vec{J}$ la **densité de l'énergie mécanique** et

$w_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right)$ la **densité de l'énergie électromagnétique**.

Le théorème de Poynting peut se récrire comme suit:

$$\frac{d}{dt}\iiint_D \left(w_M + w_{EB}\right) d\tau = -\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{S}\,d\vec{S} = -\iiint_D \nabla \vec{S}\,d\tau$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(w_M + w_{EB}\right)$$ Version locale du théorème de Poynting

On peut comparer ce théorème avec l'équation de continuité de la charge électrique :

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La densité de charges ρ est remplacée par la densité d'énergie mécanique etélectromagnétique w_M+w_{EB} et la densité de courant $\vec{J}$ est remplacée par le vecteur Poynting $\vec{S}$.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

2.3 Tenseur de contraintes de Maxwell

On détermine la force électromagnétique sur les charges électriques dans le volume du domaine ***D***.

$$\vec{F} = \iiint_D \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \rho d\tau = \iiint_D \left(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right) d\tau$$

La force $\vec{f}$ par unité de volume est :

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

On écrira la force en fonction seulement du champ électromagnétique. Pour cela nous remplaçons ρ et $\vec{J}$ par leurs expressions en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

Loi de Gauss $\rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E}$ et loi d'Ampère-Maxwell $\vec{J} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \left(\nabla \vec{E}\right) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \times \vec{B}$$

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Exercice: Utiliser le fait que $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\times\vec{E}$ et que $\nabla\vec{E}^2=2\left(\vec{E}\nabla\right)\vec{E}+2\vec{E}\times\nabla\vec{E}$ pour montrer que la force par unité de volume devient:

$$\vec{f}=\varepsilon_0\left[\left(\nabla\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{E}\nabla\right)\vec{E}\right]+\frac{1}{\mu_0}\left[\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{B}\right]-\frac{1}{2}\nabla\left(\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right)-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

Nous allons simplifier cette expression de la force en définissant le **tenseur de contraintes de Maxwell** :

$$T_{ij}=\varepsilon_0\left(E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{B}^2\right)$$

où $i=x,y,$ ou z et (δ est le symbole de Kronecker).

On peut voir facilement que

$$\left(\nabla\overleftrightarrow{T}\right)_j=\varepsilon_0\left[\left(\nabla\vec{E}\right)E_j+\left(\vec{E}\nabla\right)E_j-\frac{1}{2}\nabla_j\vec{E}^2\right]+\frac{1}{\mu_0}\left[\left(\nabla\vec{B}\right)B_j+\left(\vec{B}\nabla\right)B_j-\frac{1}{2}\nabla_j\vec{B}^2\right]$$

d'où

$$\vec{f}=\nabla\overleftrightarrow{T}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}$$

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

La force totale est alors donnée par : $$\vec{F} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint_{D} \vec{S}\, d\tau$$

Dans le cas où le second terme est nul (c'est-à-dire $\vec{S}$ est indépendant du temps), $\overleftrightarrow{T}$ est la force par unité de surface (ou le stress agissant sur la surface externe ***Σ***).

T_{ij} est la force par unité de surface suivant la direction ***i*** et agissant sur la surface orientée suivant la direction ***j***. Les éléments diagonaux (***Tx,, Tyy, Tzz***) sont des pressions et les éléments non-diagonaux ***(Txy, Txz, Tyx, Tyz, Tzx,*** et ***Tzy***) sont les modules de cisaillements.

2.4 Conservation de la quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

d'où
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{T} d\vec{S} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint_D \vec{S} d\tau$$

Le deuxième terme à droite représente la variation de la quantité de mouvement par unité de temps emmagasinée dans le champ électromagnétique :

$$\vec{p}_{EB} = \varepsilon_0 \mu_0 \iiint_D \vec{S} d\tau$$

Le premier terme $\oiint_{\Sigma} \vec{T} d\vec{S}$ représente la quantité de mouvement par unité de temps sortant à travers la surface externe Σ.

En conclusion, l'augmentation de la quantité de mouvement totale, mécanique et électromagnétique, est transportée par le champ électromagnétique à travers la surface Σ.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Si on étend le domaine $\boldsymbol{D}$ à tout l'espace alors $\oiint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} = 0$ et il y a conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\vec{p} + \vec{p}_{EB} = cste$$

Si on pose $\vec{p}$ la densité de quantité de mouvement mécanique et $\vec{p}_{EB}$ celle du champ électromagnétique.

$$\vec{p}_{EB} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}$$

d'où $$\nabla\left(-\overleftrightarrow{T}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p} + \vec{p}_{EB}\right)$$

Dans ce cas $-\overleftrightarrow{T}$ est la densité de flux de quantité de mouvement jouant le rôle de $\vec{J}$ (densité de flux de la charge) dans l'équation de continuité et comme $\vec{S}$ (densité de flux d'énergie) du théorème de Poynting.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

$-T_{ij}$ est la quantité de mouvement le long de la direction i à travers la surface orientée le long de la direction j.

$+T_{ij}$ est la contrainte le long de la direction i agissant sur la surface orientée selon j.

$\vec{S}$ est l'énergie par unité de surface.

$\varepsilon_0\mu_0\vec{S}$ est la quantité de mouvement par unité de volume emmagasinée dans le champ électromagnétique.

2.5 Conclusion

On a montré que le champ électromagnétique qui nous a servi d'intermédiaire pour calculer les forces entre les charges transporte de l'énergie :

$$w_{EB} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right)$$

de la densité de quantité de mouvement :

$$\vec{\mathrm{p}}_{EB} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}$$

et de la densité de moment angulaire :

$$\vec{l}_{EB} = \vec{r} \times \vec{\mathrm{p}}_{EB} = \varepsilon_0 \vec{r} \times \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

Les lois de conservation s'appliquent seulement si on inclut le champ électromagnétique dans la description de la mécanique des charges en mouvement.

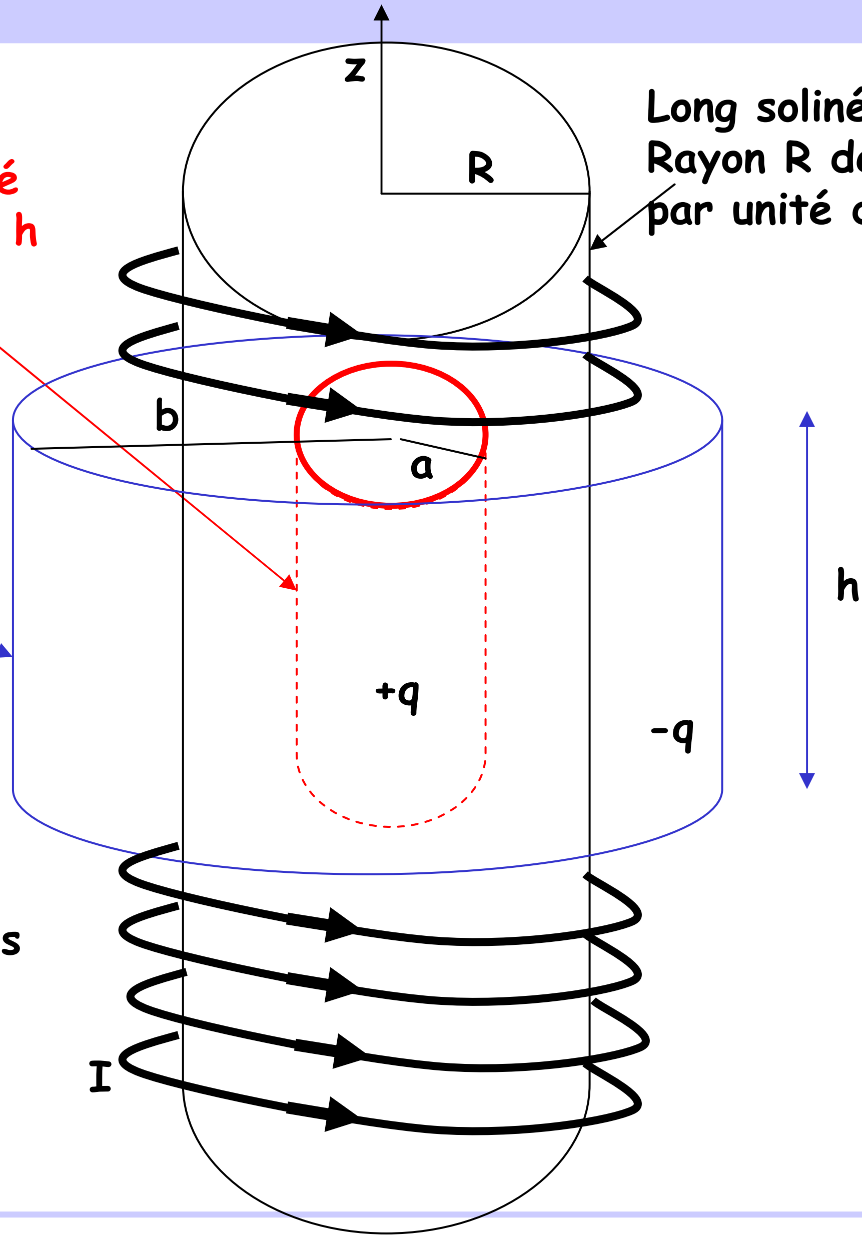
2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Exercice

Cylindre creux de rayon a chargé
en surface de +q et de longueur h

Cylindre creux de rayon a chargé
en surface de –q et de longueur h

a < R < b et h >> b



Long solinéoïde de
Rayon R de N spires
par unité de longueur

Si le courant I diminue les cylindres
commencent à tourner.

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Avant la diminution du courant électrique, la quantité de mouvement et le moment Cinétique sont emmagasinés dans le champ électromagnétique entre le petit Cylindre et le solénoïde.

Le champ électrique entre les deux cylindres est:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{rh}\hat{r}$$

Et le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est : $\vec{B} = \mu_0 NI\,\hat{z}$

La densité de quantité de mouvement dans la région a<r<R est:

$$\vec{p}_{EB} = \varepsilon_0\mu_0\vec{S} = -\frac{\mu_0 NIq}{2\pi rh}\hat{\varphi}$$

Et la densité de moment cinétique est:

$$\vec{l}_{EB} = \vec{r}\times\vec{p}_{EB} = \varepsilon_0\vec{r}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = -\frac{\mu_0 NIq}{2\pi h}\hat{z}$$

Le moment cinétique total dans le champ électromagnétique est:

$$\vec{L}_{EB} = -\frac{1}{2}\mu_0 NIq\left(R^2 - a^2\right)\hat{z}$$

2. ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT EN ELETROMAGNETISME

Quand le courant est réduit, le changement du champ magnétique induit un Champ électrique, donné par la loi de Faraday:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mu_0 N \dfrac{dI}{dt}\dfrac{R^2}{r}\hat{\varphi} & r > R \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 N \dfrac{dI}{dt} r\hat{\varphi} & r < R \end{cases}$$

Le moment de force τ_b sur le cylindre de rayon b est : $\vec{\tau}_b = \vec{b} \times (-q\vec{E})$

Et le moment cinétique est: $\vec{L}_b = \dfrac{1}{2}\mu_0 N q R^2 \hat{z} \int_I^0 \dfrac{dI}{dt} dt = -\dfrac{1}{2}\mu_0 N I q R^2 \hat{z}$

Le moment de force τ_a sur le cylindre de rayon a est : $\vec{\tau}_a = \vec{a} \times (q\vec{E}) = \dfrac{1}{2}\mu_0 N q a^2 \dfrac{dI}{dt}\hat{z}$

Et le moment cinétique est: $\vec{L}_a = \dfrac{1}{2}\mu_0 N I q a^2 \hat{z}$

Les moments cinétiques $\vec{L}_a$ et $\vec{L}_b$ font tourner respectivement les deux cylindres

Le moment cinétique est bien conservé: $\vec{L}_{EB} = \vec{L}_a + \vec{L}_b$