5ème Chapitre

EQUATIONS DE MAXWELL

1. ELECTROMAGNETISME AVANT MAXWELL

2. LOI D'INDUCTION DE MAXWELL

3. LOI LOCAL D'AMPÈRE MAXWELL

4. EQUATIONS DE MAXWELL

1. ÉLECTROMAGNÉTISME AVANT MAXWELL

1.1 Introduction

Les équations de l'électromagnétisme avant Maxwell sont données par:

$$\begin{cases} \nabla \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(loi de Gauss)} \\ \nabla \vec{B} = \vec{0} & \text{(absence de monopole)} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(loi de Faraday)} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{(loi d'Ampère)} \end{cases}$$

On remarque que ces équations ne sont pas symétriques.

La symétrie veut que $\nabla \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ lui correspond $\nabla \vec{B} = \dfrac{\rho_B}{\varepsilon_0}$

et à $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_B - \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ lui correspond $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

où ρ_B doit correspondre à la densité de charges magnétique et J_B au courant des charges magnétiques. Le facteur $\varepsilon_0 \mu_0$ donne juste la bonne dimension.

Les charges magnétiques doivent être conservées

$\nabla \vec{J}_B + \dfrac{\partial \rho_B}{\partial t} = 0$ comme les charges électriques : $\nabla \vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Les équations de Maxwell veulent que ρ_B et J_B existent. La recherche expérimentale montre que $\rho_B = J_B = 0$. Cependant, Maxwell a montré que le terme $\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ existe.

1. L'ÉLECTROMAGNÉTISME AVANT MAXWELL

1.2 Inconsistance des équations de l'électromagnétisme avant Maxwell

Vérifions que les équations de Faraday et Ampère sont telles que la divergence du rotationnel est bien nulle :

Loi de Faraday :

$$\nabla\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\nabla\vec{B}}{\partial t}=0$$

vraie car absence de monopoles magnétiques

Loi d'Ampère :

$$\nabla\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\mu_0\nabla\vec{J}\neq 0$$

Le terme de gauche est nul mais le terme de droite ne l'est pas car

$$\nabla\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$$

(équation de continuité).

2. LOI D'INDUCTION DE MAXWELL

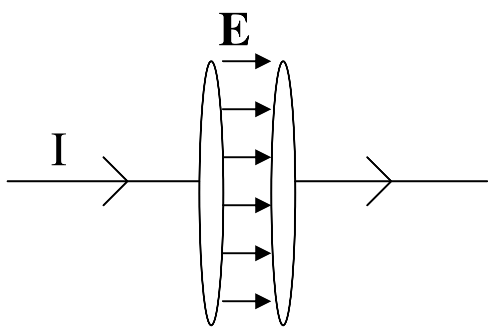
2.1 Introduction

Est-ce que la variation du flux d'un champ électrique produit un champ magnétique comme la variation d'un champ magnétique produit un champ électrique ?

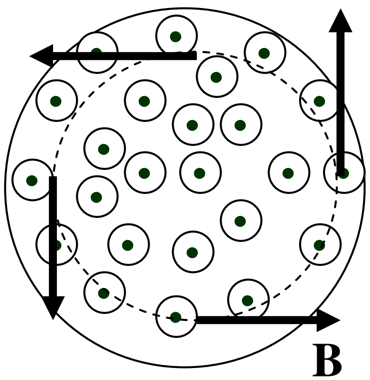
La réponse à cette question est oui.

La symétrie veut que la variation d'un champ électrique produit un champ magnétique et l'expérience le prouve.

Chargement d'un condensateur



Vue de côté



Vue de face

Loi d'induction de Maxwell:

La variation du champ électrique entraîne une apparition d'un champ magnétique qui s'oppose a sa va variation (voir figure).

2. LOI D'INDUCTION DE MAXWELL

2. 1 Loi d'induction de Maxwell

Analogie : Loi d'induction de Faraday et loi d'induction de Maxwell

Loi de Faraday : $$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Loi de Maxwell : $$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

On remarque que le flux apparaît avec le signe plus et pas avec un signe moins et le facteur $\varepsilon_0\mu_0$ donne la bonne dimension du système international de l'équation.

Le champ magnétique induit créé à son tour un champ électrique induit (Loi d'induction de Faraday) qui s'oppose à l'augmentation du champ électrique entre les armatures du condensateur.

Si on ajoute le champ magnétique d'Ampère de la magnétostatique on obtient :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Le terme $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ a la dimension d'un courant et il est appelé courant de déplacement I_D.

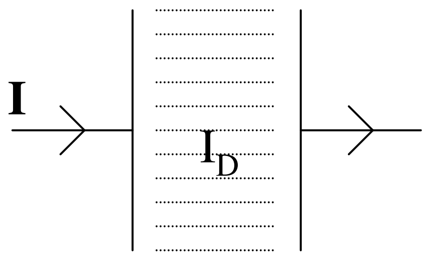
$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

2. LOI D'INDUCTION DE MAXWELL

La loi d'Ampère-Maxwell devient

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(I + I_D \right)$$

L'idée de courant de déplacement rend le courant continu à travers un condensateur (voir figure).



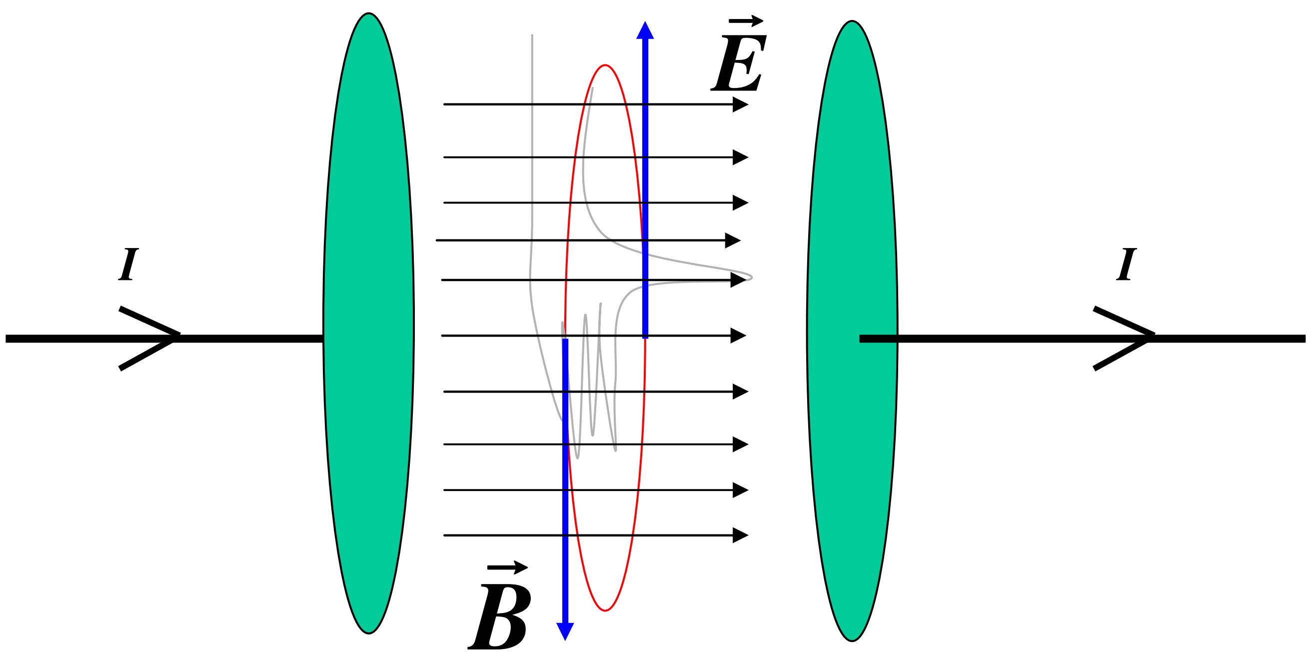
Pour calculer ce courant de déplacement, on détermine d'abord le champ électrique entre les armatures du condensateur :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} I \quad \Rightarrow \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I = I_D$$

2. LOI D’INDUCTION DE MAXWELL

Le courant de déplacement est uniforme à travers les armatures du condensateur, d’où le nom de courant de déplacement. La main droite donne le sens d’orientation des lignes de champs de **B** (le pousse est suivant le sens de ***E*** est les doigts suivant ***B*,** voir figure).



3. FORME LOCALE DE LA LOI D'AMPÈRE MAXWELL

Pour montrer **la forme locale de l'équation d'Ampère Maxwell** on utilise le théorème du rotationnel D'une part et le théorème intégrale d'Ampère Maxwell:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{B} d\vec{S} \quad = \mu_0 \left(I + I_D \right)$$

et comme

$$I = \iint_\Sigma \vec{J} d\vec{S} \quad \text{et} \quad I_D = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Sigma \vec{E} d\vec{S}$$

Par substitution dans la première équation on obtient:

$$\iint_\Sigma \nabla \times \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \left(\iint_\Sigma \vec{J} d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Sigma \vec{E} d\vec{S} \right) = \iint_\Sigma \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

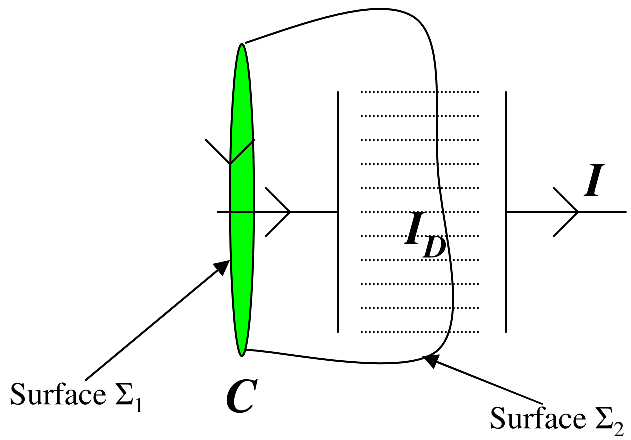
Forme locale de l'équation de Ampère-Maxwell

On peut facilement vérifier que la divergence du second membre est nulle en utilisant l'équation de continuité.

3. FORME LOCALE DE LA LOI D'AMPÈRE MAXWELL

Vérification de la loi d'Ampère Maxwell pour un condensateur

En utilisant la correction de Maxwell, on peut choisir n'importe quelle surface entourée par le contour ***C*** pour calculer le courant dans un circuit contenant un condensateur.



Forme intégrale de l'équation d'Ampère-Maxwell

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{E}d\vec{S}\right)$$

Choix de la surface Σ1 : Le terme $\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{E}d\vec{S}$ est nul et le courant est bien donné par ***I***

Choix de la surface Σ2 : Le courant ***I*** est nul mais

$$\mu_0\varepsilon_0\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}d\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0\iint_\Sigma \frac{I}{\varepsilon_0 S}dS = \mu_0 I$$

Conclusion : On obtient la même réponse quelque soit la surface d'intégration.

4. EQUATIONS DE MAXWELL

$$\begin{cases} \nabla \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(loi de Gauss)} \\ \nabla \vec{B} = \vec{0} & \text{(absence de charges magnétiques)} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(loi de Faraday)} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(loi d'Ampère-Maxwell)} \end{cases}$$

et $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ (équation de Lorentz)

L'équation de continuité peut-être obtenue en appliquant la divergence à l'équation d'Ampère-Maxwell.

Conclusion : Les équations de Maxwell montrent comment les charges électriques en mouvement produisent les champs électriques et magnétiques et la force de Lorentz montre comment ces champs déplacent les charges.