2e Chapitre

ELECTOSTATIQUE DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

1. PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE
2. CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE
3. CONDENSATEURS

1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

1.1 – Conducteurs isolés en équilibre

L'état conducteur d'un corps est caractérisé par l'existence de charges mobiles dont le champ électrique ***e(r,t)*** et la densité de charge ***ρ(r,t)*** microscopiques sont difficiles à mesurer.

La connaissance des valeurs microscopiques de ces grandeurs n'est pas nécessaire pour décrire les observations à l'échelle macroscopique..

On définit la valeur moyenne d'une grandeur physique ***g(r,t)*** en un point **M** de position ***r*** en prenant comme domaine une sphère de centre M, de rayon ***R*** et de volume Ω. Par définition :

$$\langle g\rangle(\vec{r},t)=\frac{1}{\Omega}\iiint_{\|\vec{r}-\vec{r}'\|\le R} g(\vec{r}',t)\,\mathrm{d}^3r' \qquad R \sim 300 - 1000\ nm$$

Le champ électrique et la densité de charge macroscopiques sont définis par :

$$\vec{E}=\langle\vec{e}\rangle \quad et \quad \rho=\langle\rho\rangle$$

1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

Les charges mobiles se déplacent sous l'action d'un champ électrique.

On définit le vecteur densité de courant ***j*** par :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

✓A l'intérieur d'un conducteur en équilibre : la force moyenne exercée sur chaque charge mobile est nulle ➔ aucun déplacement macroscopique de charge.

$$\vec{F}_{moyenne} = q\vec{E}_{int} = \vec{0} \longrightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$$

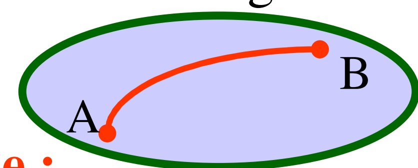
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega} \rho d^3 r = 0 \longrightarrow \rho = 0 \longrightarrow \vec{j} = \vec{0}$$

Il en résulte que, pour un conducteur chargé, la distribution de charge est nécessairement surfacique.

1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

1.2 – Potentiel et champ électrostatiques d'un conducteur

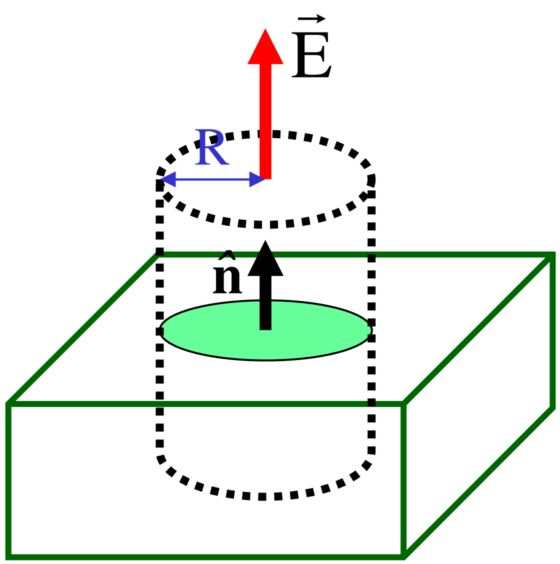
Les charges mobiles dans un conducteur sont confinées dans le volume limité par sa surface grâce à des forces décrites globalement par une barrière de potentiel V_0 (quelques eV) infranchissable à toute charge individuelle.



$$-\int_A^B \vec{E}.d\vec{L} = V(B) - V(A) = 0 \quad \text{car} \quad E = 0$$

Champ électrique :

Le potentiel est uniforme dans tout le conducteur.



$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,\pi R^2 = \frac{\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

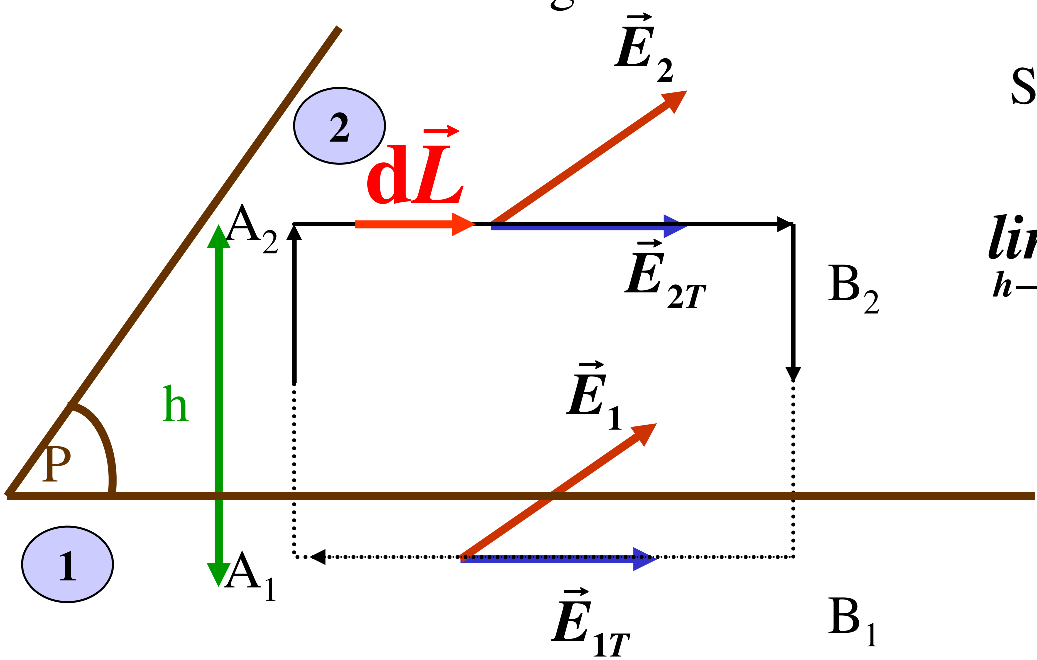
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

La surface du conducteur est une équipotentielle et le champ extérieur lui est en tout point normal.

1.3 – Champ et potentiel à travers une surface chargée

✓ Composante tangentielle du champ

Soit un conducteur chargé en surface de densité σ



Si $A_1A_2 << A_2B_2$

$$\lim_{h\to 0}\oint_C \vec{E}\,d\vec{L} = \vec{E}_2 d\vec{L} - \vec{E}_1 d\vec{L} = 0$$

$$E_{2T} = E_{1T}$$

La composante tangentielle du champ électrique E est continue de part et d'autre de la surface.

1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

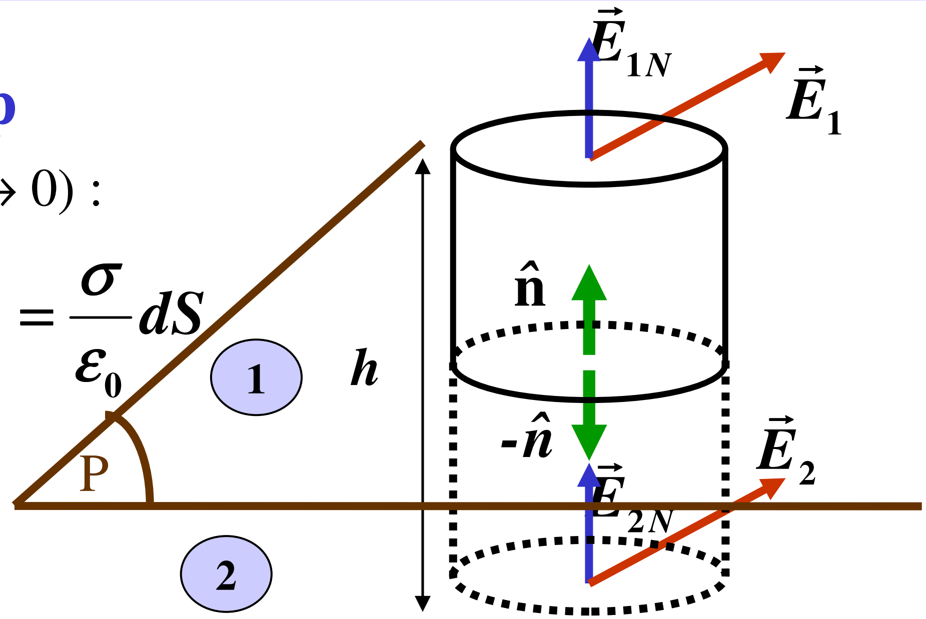
✓ Composante normale du champ

Application du théorème de Gauss ($h \to 0$) :

$$\oint\!\!\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right).\hat{n}dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dS$$

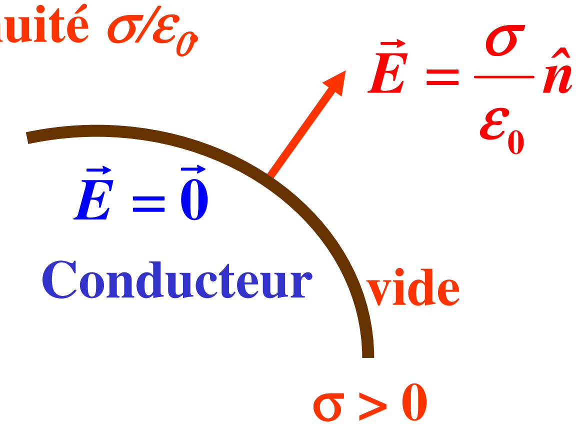
$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_{1N} - E_{2N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



La composante normale à la surface subit une discontinuité σ/ε_0

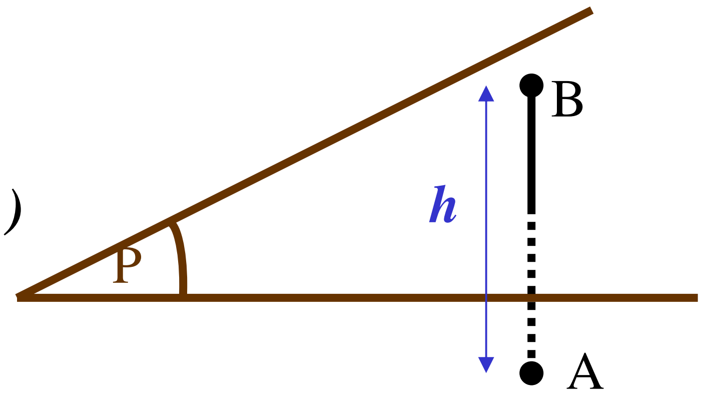
Le champ électrostatique crée **au voisinage immédiat d'un conducteur** est **normal à la surface du conducteur** et son **module** est égal au **quotient** de la **densité de charge surfacique σ** et de ε_0.



1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

✓ **Potentiel au voisinage de la surface**

$$\lim_{h\to 0}\int_A^B \vec{E}.d\vec{L} = V(A) - V(B) = O \Rightarrow V(A) = V(B)$$



Le potentiel électrostatique est continu à travers la surface et il est constant à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique.

Application : **Au voisinage immédiat d'un conducteur règne un champ électrique d'intensité E = 10 kV/m. Calculer la densité de charge surfacique et le nombre d'électrons, *n*, par cm².**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \sigma = E\varepsilon_0 = \frac{10^4}{36\pi \;\; 10^9} \simeq 8{,}8 \;\; 10^{-8}\mathrm{C.m^{-2}}$$

✓ **charge électrique** $q = \sigma S = ne$ $\Longrightarrow$ $n = \dfrac{\sigma S}{e} = \dfrac{8{,}8\times 10^{-12}}{1{,}6\times 10^{-19}} \simeq 55\times 10^{6}$

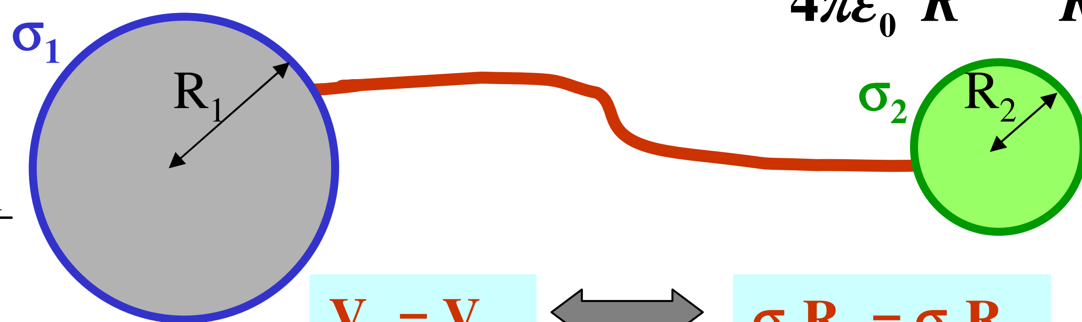
1.4 – Pouvoir des pointes

Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur chargé devient très intense si ce dernier à une courbure très élevée (forme d'une pointe).

Exemple : conducteur sphérique (q, R)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{V}{R}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1 S_1}{R_1}$$



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2 S_2}{R_2}$$

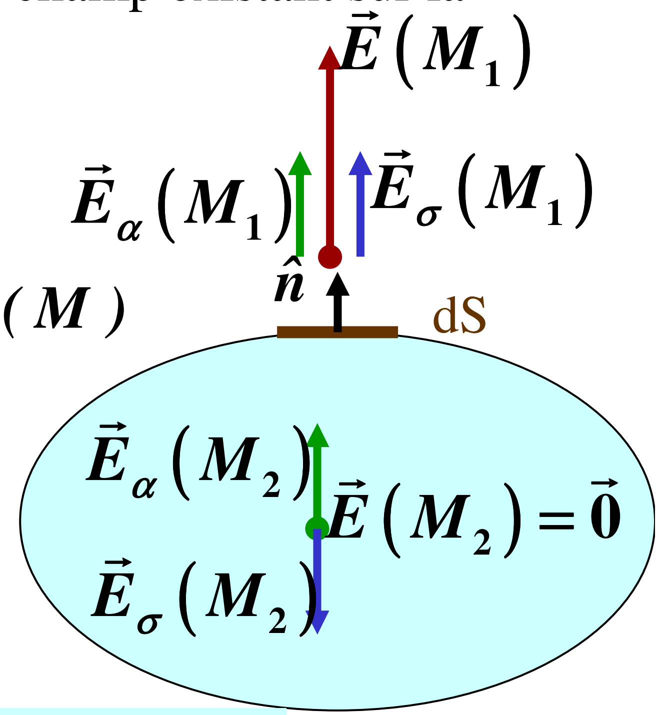
$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$

$R_1 > R_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$ **plus de charges sur les pointes**

Application : Le pouvoir des pointes permet d'expliquer les décharges électriques dues à la foudre, que reçoivent les clochers et les arbres, et justifie l'utilisation de paratonnerres pour canaliser ces décharges.

1.5 – Pression électrostatique

Les forces appliquées aux charges surfaciques résultent du champ existant sur la surface.



E_σ : champ créé par dq = σdS

E_α : champ créé par le reste de la distribution

✓ Propriété de la superposition $\vec{E}(M) = \vec{E}_\sigma(M) + \vec{E}_\alpha(M)$

✓ $\vec{E} = \vec{E}_\sigma(M_1) + \vec{E}_\alpha(M_1) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

✓D'autre part, la charge dq crée au voisinage immédiat de dS, un champ identique à celui d'une distribution surfacique plane de densité σ.

$$\vec{E}_\sigma(M_1) = -\vec{E}_\sigma(M_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} \Longrightarrow \vec{E}_\alpha(M_1) = \vec{E}_\alpha(M_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

E_α est continu à la traversée de la surface et a pour valeur $\sigma/2\varepsilon_0$ sur la surface.

1 – PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

La force s'exerçant sur la charge ***dq*** est due à la seule action du champ E_α, créé par les autres charges de la distribution, car la moyenne du champ en surface est E_α.

$$d\vec{F} = \sigma dS\vec{E}_\alpha = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{n}dS$$

orientée vers l'extérieur du conducteur et est normale à sa surface.

On introduit la pression électrostatique $\boxed{p_e = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ Unité SI : Pa

Exemple :

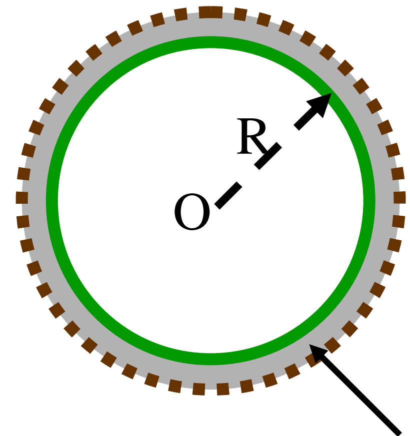
La pression électrostatique en un point de la surface d'un conducteur, au voisinage immédiat duquel le champ est de 10 kVm^{-1}.

$$p_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(10^4)^2}{72\pi 10^9} = \frac{1}{720\pi} \simeq 4,4\times 10^{-4}\,\text{Pa}$$

Pression très faible par rapport à la pression atmosphérique $p_0 = 10^5$ Pa

1.6 – Relation énergie et pression électrostatiques

Cas d'un conducteur sphérique chargé uniformément en surface



- ✓ Volume : $\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3$ ⟹ Charge : $q = \sigma S = \sigma\, 4\pi R^2$
- ✓ Potentiel : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$
- ✓ Champ : $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$
- ✓ Pression : $p_e = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{q^2}{R^4}$ (tend à augmenter le volume) $d\Omega = 4\pi R^2 dR$
- ✓ Energie : $W = \frac{1}{2}\oiint_S V\sigma\, dS = \frac{V_0}{2}\oiint_S \sigma\, dS = \frac{1}{2}Vq = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$

Evaluation de la variation de l'énergie électrostatique correspondant à une variation élémentaire dR du rayon:

$$dW = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}q^2\frac{dR}{R^2} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}d\Omega = -p_e\, d\Omega$$

(dΩ étant la variation du volume de la sphère)

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

2.1 – Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur en équilibre électrostatique :

✓ A la distribution de charge surfacique σ correspond une seule charge totale q et un seul potentiel V

$$q = \iint_{\Sigma} \sigma \mathrm{d}S \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|} d^2r'$$

✓ A la distribution $\sigma' = a\,\sigma$ correspond une charge totale q' et un potentiel V' :

$$q' = \iint \sigma' \, dS = a \, q \qquad V'(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma} \frac{\sigma'(\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|} d^2r' = a \, V(\vec{r})$$

En particulier sur la surface du conducteur, qui est une équipotentielle

$$\frac{q}{V} = \frac{q'}{V'} = C = Cte > O$$

C : capacité du conducteur ne dépend que de la géométrie de la surface.

Unité : Farad [F] 1 F = C.V^{-1}

Exemple : Sphère conductrice de rayon R et de charge q

$$V = \frac{1}{4\pi \; \varepsilon_0} \frac{q}{R} \Longrightarrow C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad C = 1\ \mathrm{F} \quad \Rightarrow \; R = 9\ 10^9\ \mathrm{m}$$

Le Farad est une unité très grande pour mesurer les capacités usuelles. On utilise souvent le microF ($1\mu F = 10^{-6} F$), le nanoF ($nF = 10^{-9} F$) et le picoF ($pF = 10^{-12} F$).

2.2 - Énergie électrostatique d'un conducteur isolé

C'est le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur.

V = Cte en tout point de la surface du conducteur $\Rightarrow W = \frac{1}{2} V \oiint_{\Sigma} \sigma dS = \frac{1}{2} q V$

D'autre part $q = C.V$ $\Longrightarrow$ $\boxed{W = \frac{1}{2} C \; V^2}$

L'énergie électrostatique est localisée dans toute la région de l'espace où la distribution crée un champ.

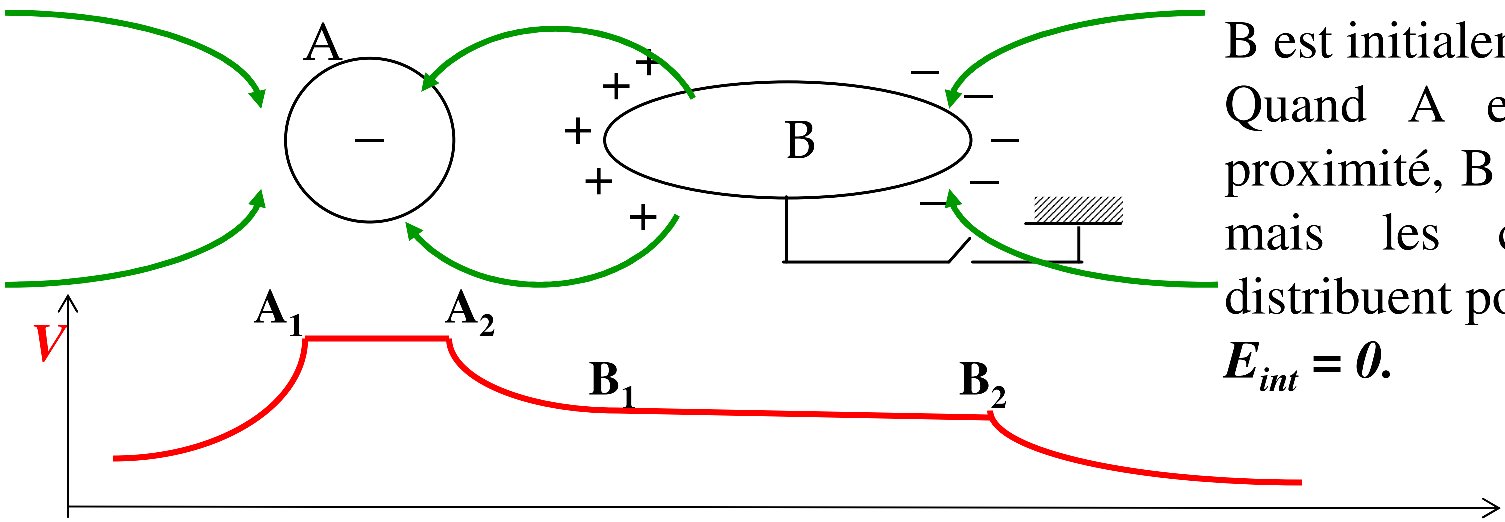
2.3 - Systèmes de conducteurs

Généralisation : les mêmes conditions sur chaque conducteur en équilibre

- ✓ V = Cte sur chaque conducteur,
- ✓ $E_{int} = 0$ à l'intérieur,
- ✓ au voisinage de la surface $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

Théorème d'unicité : V doit satisfaire l'équation de Laplace en tout point : $\Delta V = 0$

2.3.1 - Phénomènes d'influence



B est initialement neutre. Quand A est placé à proximité, B reste neutre mais les charges se distribuent pour que $E_{int} = 0$.

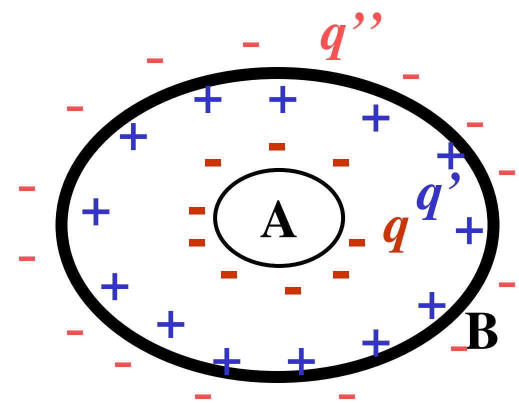
2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

Un conducteur neutre, placé dans un champ extérieur $\mathbf{E}_{ext}$ (champ influençant) subit une redistribution de ses porteurs de charges mobiles qui entraîne l'apparition d'un champ compensant le champ extérieur à l'intérieur du conducteur (influencé).

2.3.2 - Influence totale

Soit un conducteur (**B**) entourant globalement un conducteur influençant (**A**).

Toutes les lignes de champ issues de **A** atteignent la surface de **B**.
A l'équilibre, $E_{int} = 0$ dans le conducteur influencé.



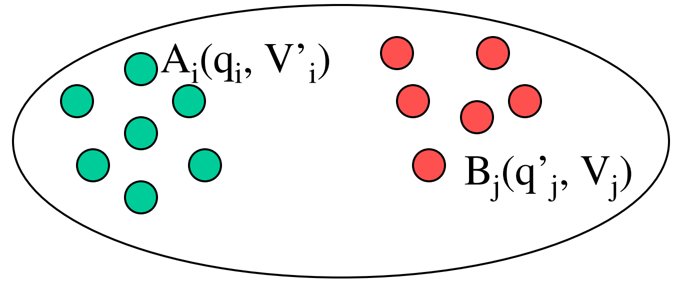
✓ Théorème de Gauss appliqué à la surface Σ de **B**

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q+q'}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad q' = -q$$

Comme **B** neutre ⇒ par influence $q' + q'' = 0$ ⇒ $\boxed{q'' = -q' = q}$

2.4 – Identité de Gauss

✓Soit un système de n charges discrètes



V_j : potentiel aux points B_j crée par les charges q_i placées aux points A_i

V'_i : potentiel aux points A_i crée par les charges q'_j placées aux points B_j

$$V_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_{ij}}$$

$$V'_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \frac{q'_j}{r_{ij}}$$

Identité de Gauss

$$\sum_i q_i V'_i = \sum_j q'_j V_j$$

L'énergie des charges q_i dans le champ crée par les charges q'_j est égale à l'énergie de charges q'_j dans le champ crée par les charges q_i.

✓ Pour une distribution continue

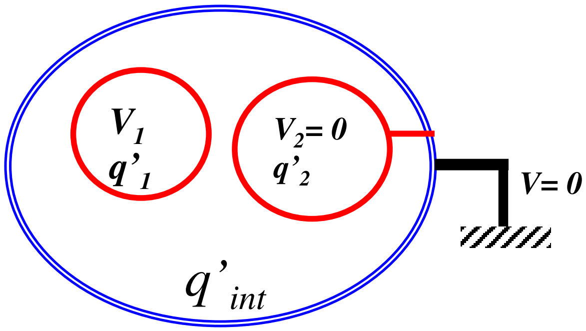
$$\oiint_\Sigma V'\sigma dS = \oiint_{\Sigma'} V\sigma' dS$$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

2.5 – Coefficients de capacité d'un système de conducteurs

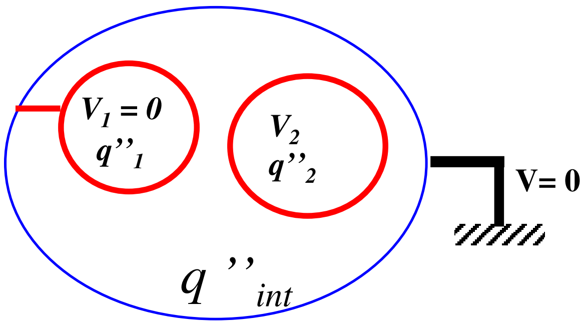
n conducteurs en présence $\Rightarrow$ C_{ij} : coefficient d'influence de ***i*** sur ***j***

C_{ii} : capacité du conducteur ***i***



$$q'_1 = C_{11} \; V_1 \qquad q'_2 = C_{21} \; V_1$$

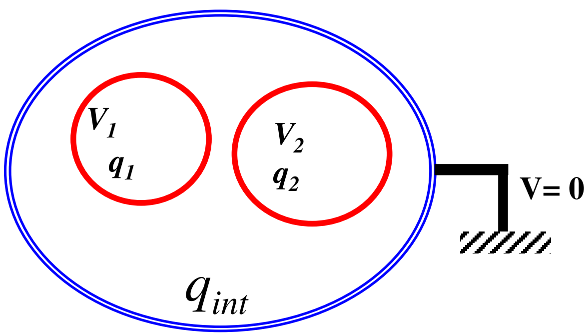
$$q'_{int} = -(q'_1 + q'_2)$$



$$q''_1 = C_{12} \; V_2 \qquad q''_2 = C_{22} \; V_2$$

$$q''_{int} = -(q''_1 + q''_2)$$

Principe de superposition



$$q_1 = q'_1 + q_1''$$

$$q_2 = q'_2 + q_2''$$

$\Rightarrow$

$$q_1 = C_{11} \; V_1 + C_{12} V_2$$

$$q_2 = C_{21} \; V_1 + C_{22} V_2$$

$$q_{int} = -(q_1 + q_2)$$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

✓ Système de deux conducteurs en équilibre

	1	2	1	2
V	V_1	0	0	V_2
q	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$

Identité de Gauss : $Vq' = V'q \iff V_1(C_{12}V_2) = V_2(C_{21}V_1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{C_{21} = C_{12}}$ Influence mutuelle

➢ La capacité d'un conducteur i représente le rapport $\dfrac{q_i}{V_i}$ lorsque tous les autres potentiels sont nuls.

On montre :

- ➢ Les coefficients d'influence $C_{ij} < 0$
- ➢ Les coefficients de capacité $C_{ii} > 0$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

✓ Généralisation

Soit un système de n conducteurs en équilibre $\{(\sigma_1, \Sigma_1), (\sigma_2, \Sigma_2), \ldots. (\sigma_n, \Sigma_n)\}$

Le potentiel V_i en un point M de la surface du conducteur i: $V_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\oiint_{\Sigma_j}\dfrac{\sigma_j}{r_{ij}}dS_j$

$$q_i = \oiint_{\Sigma_i}\sigma_i dS_i \quad \Longrightarrow \quad V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{q_i}\sum_{j=1}^{n}\oiint_{\Sigma_i}\oiint_{\Sigma_j}\frac{\sigma_i\sigma_j}{r_{ij}}dS_i dS_j$$

$$q_j = \oiint_{\Sigma_j}\sigma_j dS_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_i = \sum_{j=1}^{n}P_{ij}q_j}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{q_i q_j}\oiint_{\Sigma_i}\oiint_{\Sigma_j}\frac{\sigma_i\sigma_j}{r_{ij}}dS_i dS_j$$

P_{ij} : coefficients de potentiel dépendent uniquement de la configuration géométrique du système.

Les potentiels électriques des conducteurs sont des fonctions linéaires de toutes les charges.

Les charges des différents conducteurs sont obtenues en inversant la matrice :

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \quad q_j \longrightarrow q_j = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad V_i \text{ avec } \quad C_{ij} = \frac{M_{ij}}{\Delta}$$

M_{ij} : mineur de P_{ij}

Δ : déterminant de P_{ij}

$[C] = [P]^{-1}$ matrice inverse

Application : cas d'un système à deux conducteurs

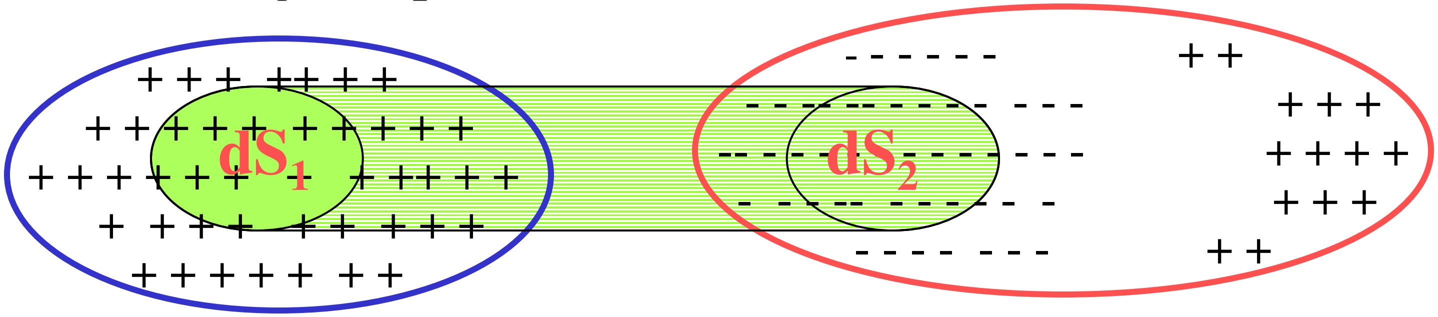
$$\begin{cases} V_1 = P_{11}q_1 + P_{12}q_2 \\ V_2 = P_{21}q_1 + P_{22}q_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= \frac{P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} = \frac{P_{22}}{\Delta} > 0 \\ C_{22} &= \frac{P_{11}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} = \frac{P_{11}}{\Delta} > 0 \end{aligned}\right\} \text{Coefficients de capacité}$$

$$C_{12} = C_{21} = -\frac{P_{12}}{\Delta} = -\frac{P_{21}}{\Delta} < 0 \qquad \text{Coefficients d'influence}$$

2.6 – Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs en équilibre, un tube de champs découpe sur leurs surfaces des éléments dS_1 et dS_2 : éléments correspondants



Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \dfrac{dq_1 + dq_2}{\varepsilon_0} = 0$ car $E_{int} = 0$ et $E \,//\, S_{latérale}$

Charge contenue dans le tube est nulle $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 \; dS_1 = \sigma_2 \; dS_2}$

- ✓ Par influence totale : $q_1 = q_2$
- ✓ Par influence partielle : $|q_1| > |q_2|$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

Pour un système de n conducteurs, dont l'un est au potentiel V_1 et les autres au potentiel $V = 0$, on a :

$$q_i = C_{i1} V_1$$

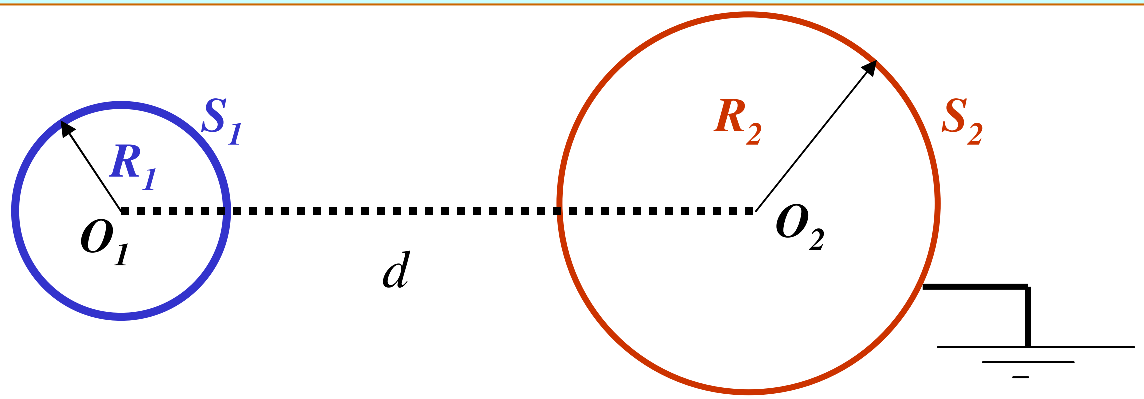
Les lignes de champs vont du conducteur 1 aux autres conducteurs

$$q_1 \geq -\ (q_2 + q_3 + \ \ldots\ldots\ q_n)$$

$$\Rightarrow \quad C_{11} \geq -\sum_{i=2}^{n} C_{i1}$$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

Application : Deux conducteurs sphériques de rayons R_1 et R_2, ont leurs centres à une distance d. Calculer leurs capacités et leurs coefficients d'influence.
On suppose que pour les actions éloignées, chaque sphère est équivalente à sa charge placée à son centre.



$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

S_2 au sol $\Rightarrow$ $V_2 = 0$

S_1 $\Rightarrow$ V_1

V= Cte à l'intérieur de tout conducteur en équilibre

$$V(O_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{d}\right) = \frac{V_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{21}}{d}\right) = V_1$$

$$V(O_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{R_2}\right) = \frac{V_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{C_{11}}{d} + \frac{C_{21}}{R_2}\right) = 0$$

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

Système d'équation

$$\begin{cases} dC_{11} + R_1 C_{21} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 d \\ R_2 C_{11} + dC_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_{11} &= 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1 R_2} \right) \\ C_{21} &= -4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2 d}{d^2 - R_1 R_2} \right) \end{aligned}$$

On remarque que $C_{11} > O$ et $C_{12} = C_{21} < 0$

✓ Si $d \rightarrow \infty \Rightarrow C_{12} = C_{21} \rightarrow 0$ pas d'influence

On obtient :

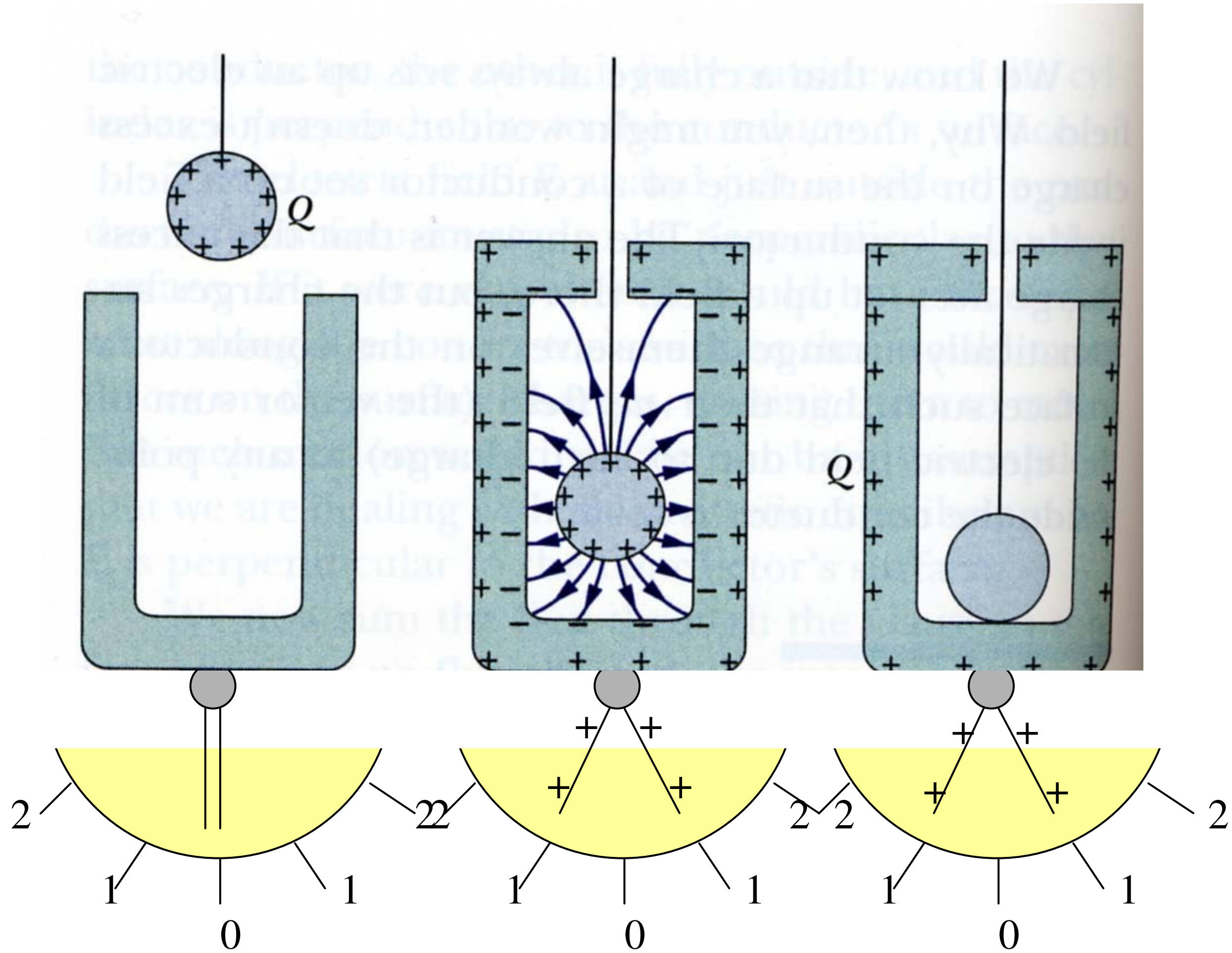
$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

Capacité d'une sphère isolée

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D’INFLUENCE

Applications :

1. Electromètre



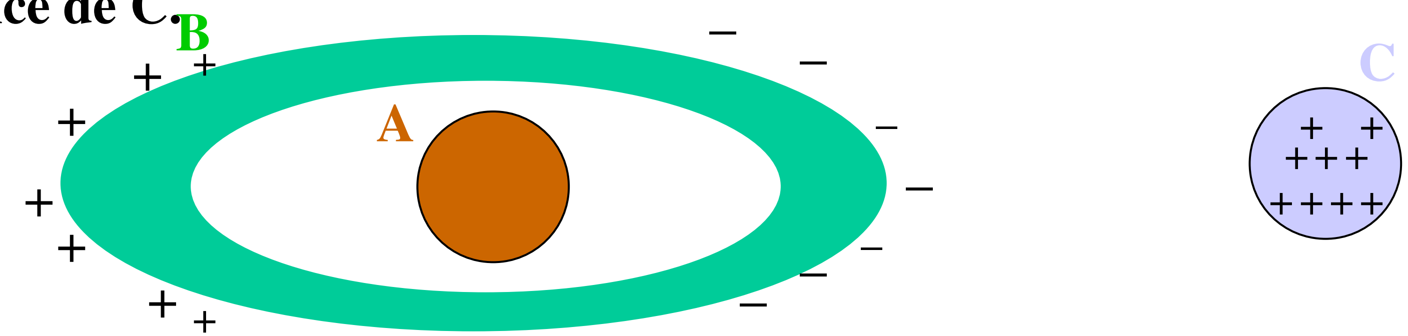
La déviation de l’aiguille est proportionnelle à la charge Q du corps influençant.

2 – CAPACITES ET PHENOMENES D'INFLUENCE

Applications :

2. **Ecrans électriques**

B est un écran pour A par rapport à C: A ne subit aucun effet dû à la présence de C.

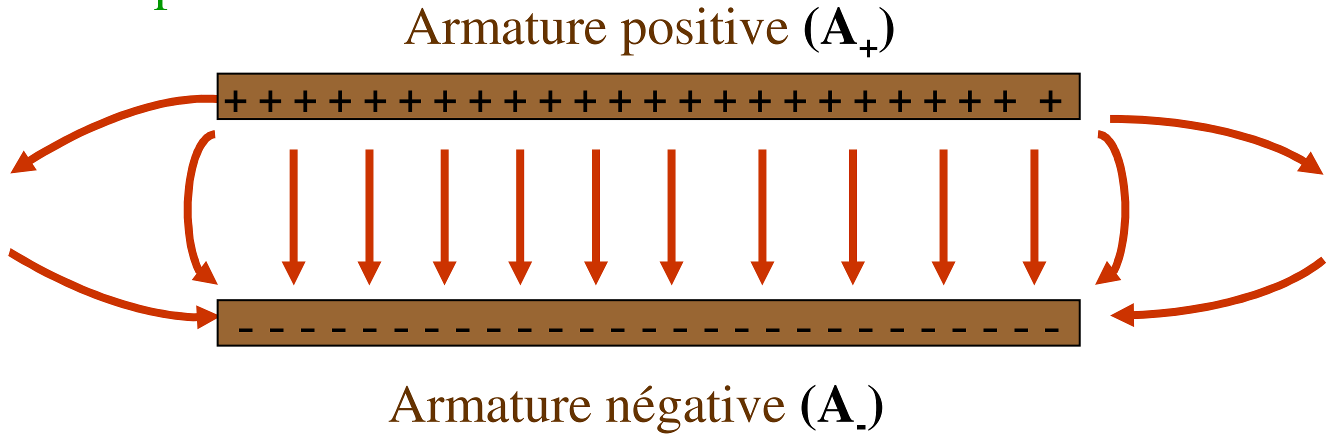


Le conducteur à l'intérieur de la voiture peut mourir brûlé mais pas électrocuté.

3.1 – Définition

Un condensateur est un système de deux conducteurs proches l'un de l'autre, en influence totale, portant donc des charges de même valeur absolue et de signes différents.

Exemple : Condensateur plan



✓ Concentration des lignes de champs entre A_+ et A_-

✓ Condensation du champ et de l'énergie électrostatique

$$\mathbf{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{espace} E^2 d^3 r \cong \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\Omega} E^2 d^3 r}$$

Ω : espace entre A_+ et A_-

3.2 – Capacité d'un condensateur

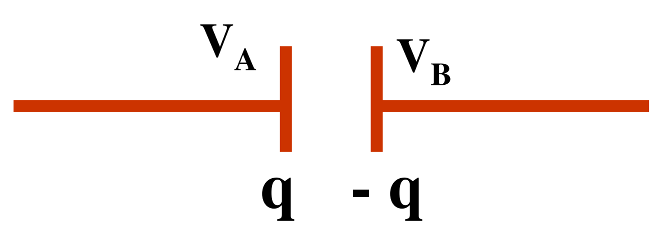
✓On appelle capacité d'un condensateur, le coefficient positif :

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{V_A - V_B}$$

Le rapport de la charge du condensateur à la différence de potentiel (d.d.p) entre les armatures.

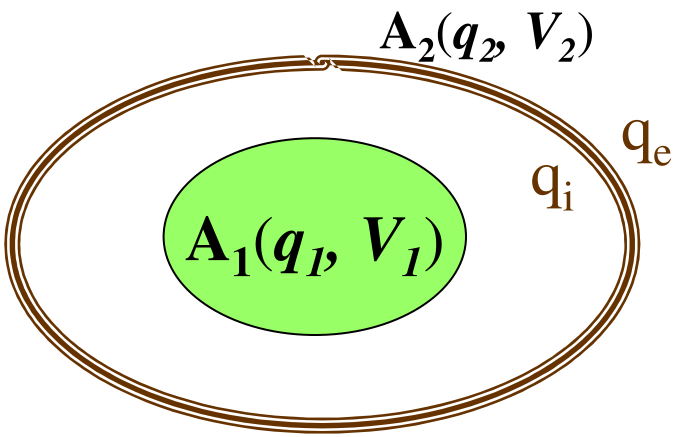
✓La capacité C est toujours le produit de ε_0 par une expression ne dépendant que de la géométrie du condensateur : forme, dimension et position des armatures.

Représentation symbolique :



3 – CONDENSATEURS

Démonstration :



influence totale $q_i = -q_1$ et $q_2 = q_i + q_e$

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

$$q_e = q_2 + q_1 = (C_{21} + C_{11})V_1 + (C_{22} + C_{12})V_2$$

✓ Théorème des écrans : q_e est indépendant de V_1 car V_2 fixe

✓ Si $V_2 = 0 \Rightarrow q_e = 0 \quad \forall V_1 \Rightarrow C_{11} + C_{21} = 0 \Rightarrow$ identité de Gauss

D'où : $\boxed{C_{11} = - C_{21} = - C_{12}}$

$$q_e = (C_{22} - C_{11})V_2 = C'V_2$$

C' : capacité du conducteur A_2 isolé dans l'espace

$$q_1 = C_{11}V_1 - C_{11}V_2 = C_{11}(V_1 - V_2)$$

$\underline{C_{11} = C}$: capacité du condensateur

3 – CONDENSATEURS

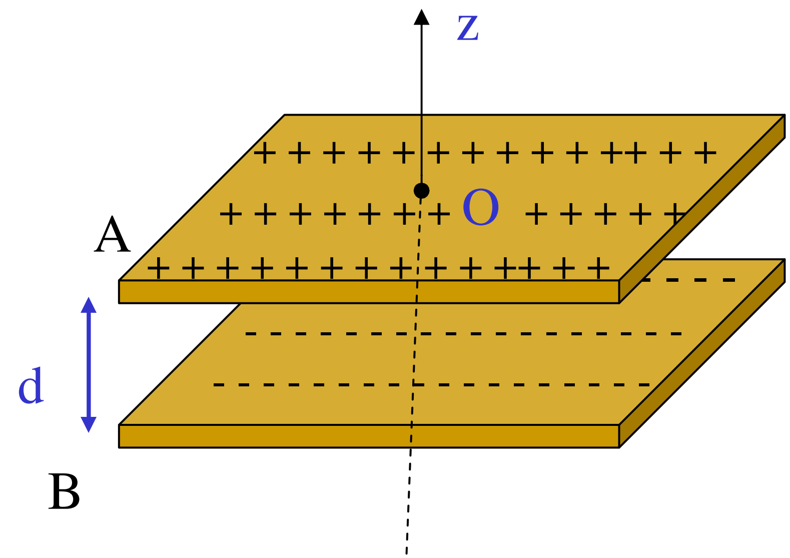
3.3 – Condensateurs à simples géométries

3.3.1 – Condensateur plan

✓ Théorème de Gauss $E_A = E_B = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$\Rightarrow$ champ entre les deux armatures A et B

$$E = -(E_A + E_B) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



✓ Circulation de **E**

$$\mathbf{V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}.d\vec{L} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d}{S}}$$

$$\boxed{C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

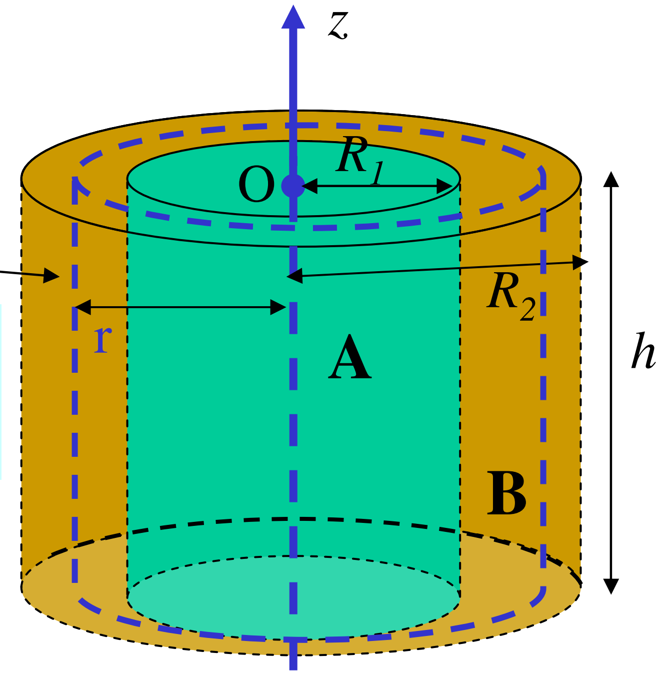
Remarque :

$d \downarrow$ $C \uparrow$ $\Rightarrow$ $q \uparrow$ Condensation de charge

3.3.2 – Condensateur cylindrique

E : radial entre les armatures

✓ Théorème de Gauss : surface ***Σ(r, h)***



$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\pi r h E \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{rh}}$$

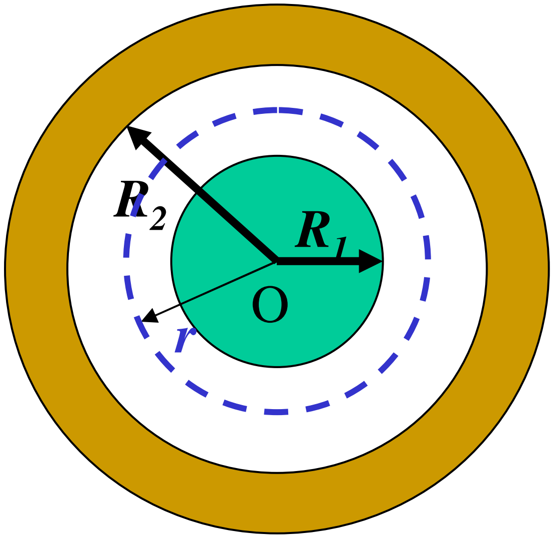
✓ Circulation de ***E***

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{q}{2\varepsilon_0 h} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} Ln \frac{R_2}{R_1}$$

⇒ capacité

$$\boxed{C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{Ln \dfrac{R_2}{R_1}}}$$

3.3.3 – Condensateur sphérique



E = f(r): radial entre les armatures

- ✓ Théorème de Gauss : surface sphère de rayon r

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

- ✓ Circulation de **E**

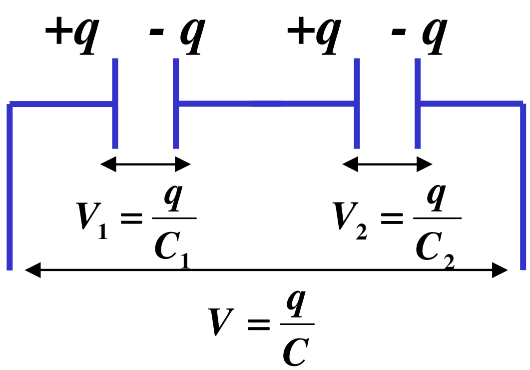
$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$\Rightarrow$ capacité $$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

3 – CONDENSATEURS

3.4 – Lois des combinaisons des capacités

3.4.1 – Groupement en série



$$V = V_1 + V_2$$

$$\Updownarrow$$

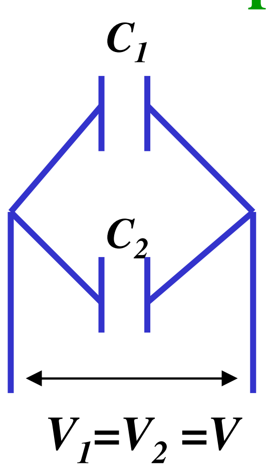
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Influence totale : les charges portées par toutes les armatures sont égales en valeur absolue.

✓Système de ***n*** capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

3.4.2 – Groupement en parallèle



$$q = q_1 + q_2$$

$$\Updownarrow$$

$$C = C_1 + C_2$$

La d.d.p est la même aux bornes des condensateurs.

✓ Système de ***n*** capacités en parallèle

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

3.5 – Energie emmagasinée dans un condensateur

L'énergie électrostatique d'un condensateur est l'énergie nécessaire pour le charger.

$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Cette énergie est localisée dans l'espace où règne le champ électrique entre les armatures.

✓ **Densité d'énergie :** en un point du volume Ω entre les armatures $w = \dfrac{W}{\Omega}$

Exemple :

Condensateur plan : $\Omega = S.d$; $V = E.d$; $C = \varepsilon_0 S/d$ ➡ $w = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E^2$

✓ **Force d'attraction entre les armatures**

Pour écarter les armatures d'une distance élémentaire **d*e***, il faut fournir une énergie ***dW* =*F*.d*e***

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q^2}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2}\frac{\mathrm{d}e}{\varepsilon_0 S} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{q^2}{S} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2 S$$