

**Licence Physique et Applications 2<sup>ème</sup> année  
1<sup>er</sup> semestre de l'année 2009/2010**

**ELECTROMAGNETISME**

**Cours : M. ALOUANI**

**<http://univ-r.u-strasbg.fr> et <http://ulpmultimedia.u-strasbg.fr/Alouani>**

**Travaux Dirigés :**

<b>Groupe A</b>	<b>Groupe C</b>	<b>Groupe D</b>	<b>Groupe E</b>
<b>Mer. 14H Salle 346</b>	<b>Mer. 14H Salle 116</b>	<b>Mer. 16H Salle 145</b>	<b>Mer. 14H Salle 346</b>
<b><i>Marcopoulos</i></b>	<b><i>Jollet</i></b>	<b><i>Besbas</i></b>	<b><i>Baudot</i></b>

# PROGRAMME

**I - INTERACTIONS ÉLECTROSTATIQUES**

**II - ELECTROSTATIQUE DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE**

**III - INTERACTION MAGNÉTOSTATIQUE**

**IV - INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE**

**V - EQUATIONS DE MAXWELL**

**VI - ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE**

# OUVRAGES

- ✓ Berkeley, Electricité et Magnétisme  
**Purcell** – Dunod
- ✓ Le cours de physique de Feynman  
Électromagnétisme 1
- ✓ Fundamentals of Physics  
**Halliday, Resnick, Walker** - Wiley
- ✓ Electromagnétisme 1 et 2  
**Faroux et Renault** - Dunod
- ✓ Électromagnétisme, Fondements et Applications  
**Pérez** – Masson
- ✓ Classical Electrodynamics  
**J. D. Jackson** - Wiley

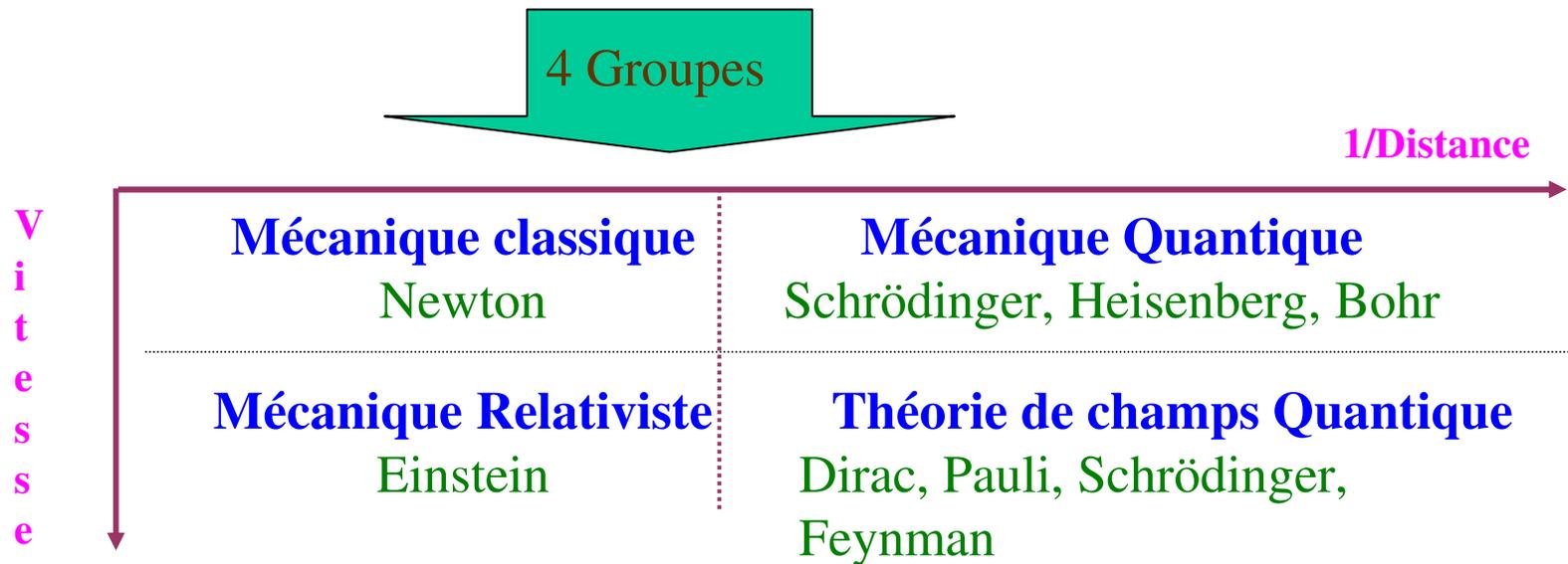
# INTERACTIONS ELECTROSTATIQUES

- 1. LOI DE COULOMB**
- 2. CHAMP ELECTROSTATIQUE**
- 3. THEOREME DE SUPERPOSITION**
- 4. THEOREME DE GAUSS**
- 5. POTENTIEL ELECTRIQUE**
- 6. APPLICATION: DIPOLE ELECTRIQUE**
- 7. ENERGIE ELECTROSTATIQUE**

# 0 - INTRODUCTION

## 0.1 – Rôle de la physique fondamentale

- ✓ Etudier les **propriétés** de la **matière**, de l'**espace** et du **temps**.
- ✓ Expérimentation et théorie  $\Rightarrow$  **tenter d'expliquer** l'ensemble des **phénomènes naturels**, en établissant les lois qui les régissent.



**Mécanique** : Étude de mouvements des corps et des forces

Grandeurs : **déplacement, temps, vitesse, accélération, masse, force, énergie, etc ...**

# 0 – INTRODUCTION

## 0.2 – Interactions fondamentales

On distingue 4 forces fondamentales dans la nature :

- ✓ **Interactions nucléaires ou fortes** :  $I = 1$  (portée  $10^{-15}$  m)  
responsables de la cohésion des nucléons dans le noyau atomique

$$F_F = g \frac{e^{-\mu r}}{r^2}$$

- ✓ **Interactions faibles** :  $I = 10^{-7}$  (portée  $< 10^{-18}$  m)

régissent certains processus intranucléaires comme la désintégration  $\beta$

- ✓ **Interactions électromagnétiques** :  $I = 10^{-4}$  (portée infinie)

réactions chimiques et phénomènes électriques

$$F_C = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- ✓ **Interactions gravitationnelles** :  $I = 10^{-40}$  (portée infinie)

Forces d'interaction entre les masses des objets

$$F_G = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

# 0 -INTRODUCTION

## 2.3 - Tentatives d'unification des forces

- Depuis l'antiquité ⇒ observation de l'électricité et du magnétisme
  - ✓ 1820 : Oersted ⇒ Découverte : interaction électricité-magnétisme
  - ✓ 1827 : Ampère ⇒ Magnétisme dû aux déplacements des charges électriques
  - ✓ 1831 : Faraday ⇒ Mouvement d'un aimant génère un courant électrique  
Postulat : la lumière est de nature électromagnétique (EM)
  - ✓ 1873 : Maxwell ⇒ 4 équations différentielles qui décrivent la nature des champs EM en termes d'espace et de temps
  - ✓ 1884 : Hertz ⇒ l'électricité pouvait être transmise par des ondes EM qui se déplacent à la vitesse de la lumière

# 0 - INTRODUCTION

## ✓ Début du 20ème siècle :

- Unification : Electricité, Magnétisme et Optique
- Elargissement du spectre des radiations EM :

Ondes Radio , Micro Ondes , I.R, Visible, U.V , R.X et Gamma

✓ **1910** : Einstein ⇒ Introduction de la relativité générale et tentatives d'unification des forces électromagnétiques et gravitationnelles

✓ **1960** : Glashow, Weinberg et Salam ⇒ Unification des interactions faibles et électromagnétiques en faisant appel à des symétries internes des propriétés intrinsèques des particules (charge, spin)

## ✓ Aujourd'hui :

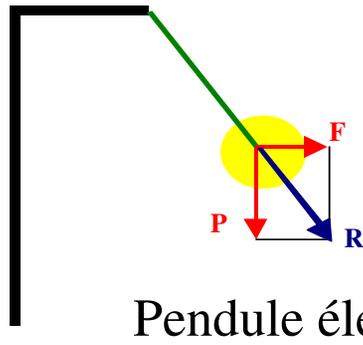
Tentatives de combiner les 4 interactions à l'aide de la théorie des cordes super symétrique

Complexité mathématique & limitation expérimentale!

# 1 - PHENOMENES D'ELECTRISATION

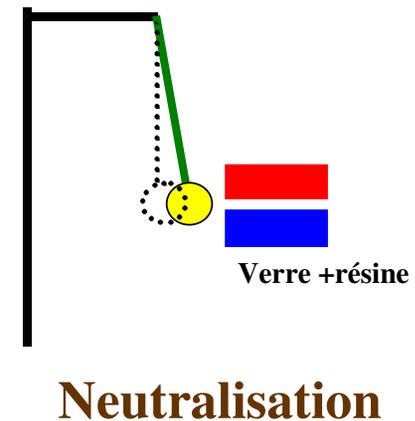
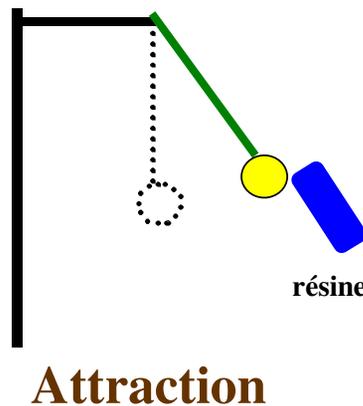
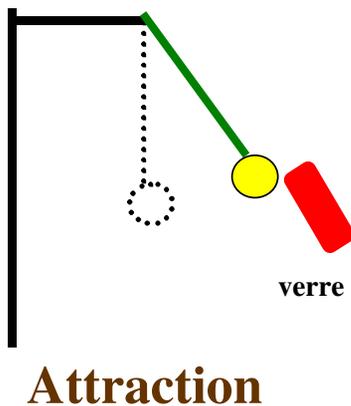
## 1.1 – Étude quantitative de l'électrisation

- ✓ **Électroscope** : appareils permettant de déceler l'électrisation d'un corps



Tous les corps électrisés placés au voisinage du pendule sans contact attirent la balle (initialement neutre).

### ✓ Observation expérimentale

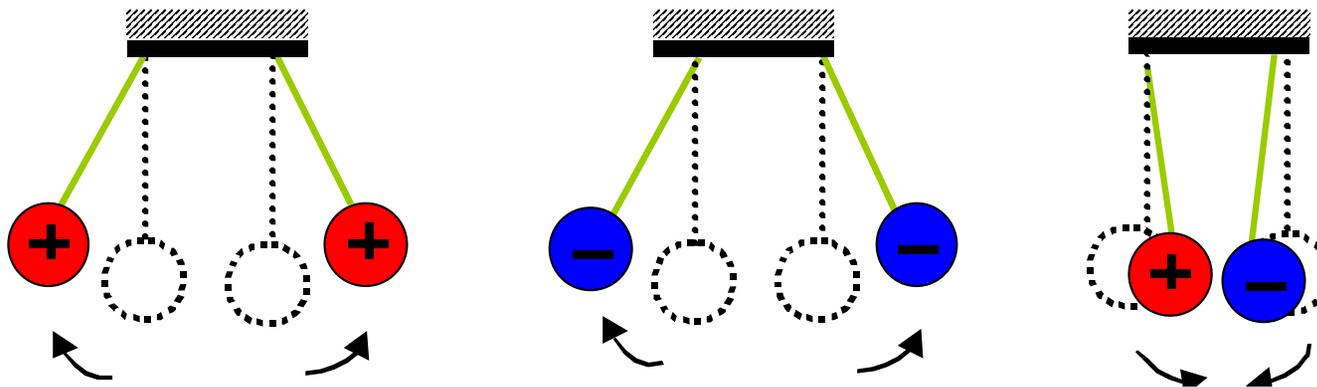


# 1 - PHENOMENES D'ELECTRISATION

## 1.2 – Deux modes d'électricité

**Convention : Franklin (1706-1790)**

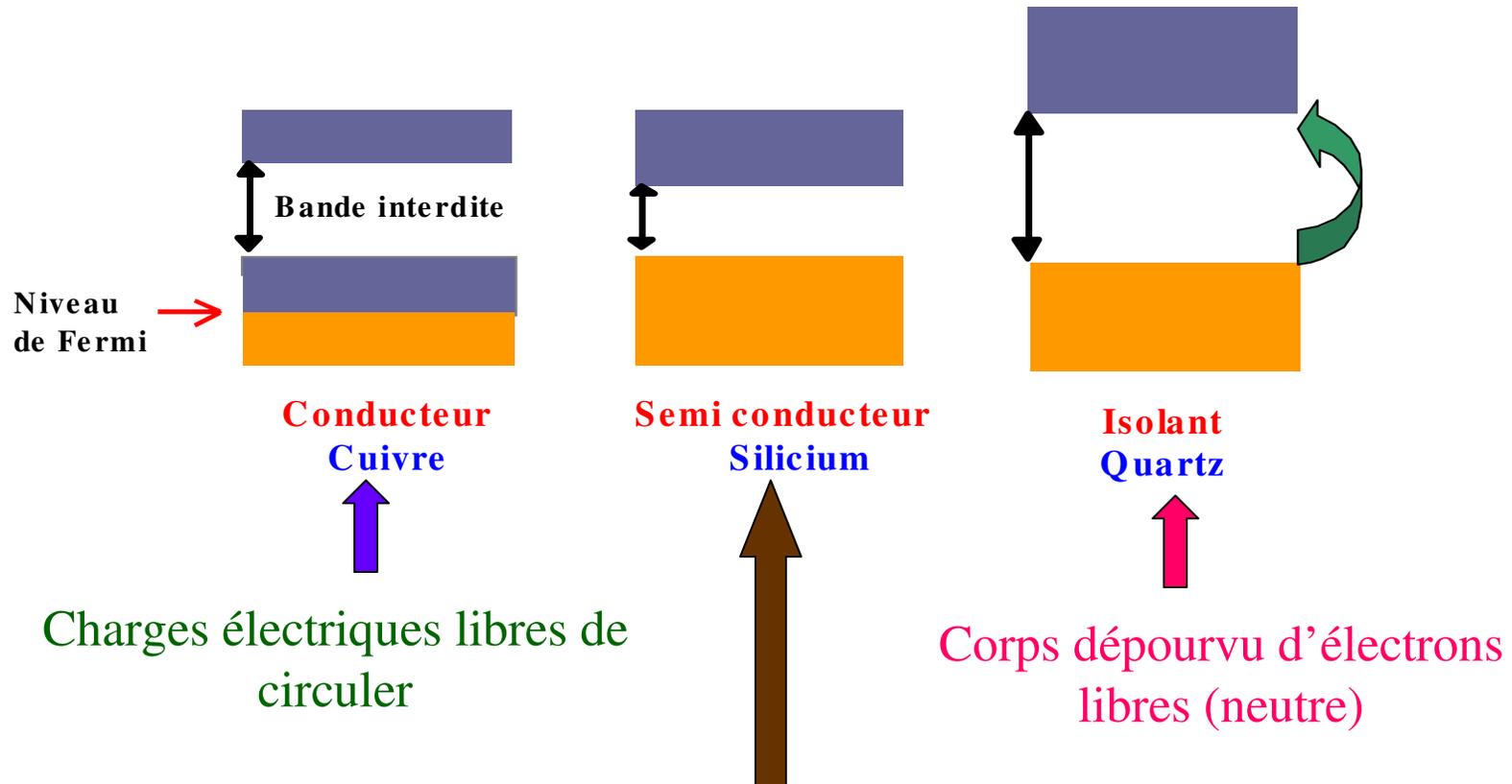
- ✓ **Etat vitreux** : électricité positive
- ✓ **Etat résineux** : électricité négative



Deux corps dans des états électriques de **même signe se repoussent** tandis que deux corps dans des **états électriques de signe opposés s'attirent**

# 1 – PHENOMENES D'ELECTRISATION

## 1.3 – Explication de l'électrification : théorie électronique



l'énergie thermique permet aux électrons de la bande occupée de sauter dans la bande non occupée

## 2 – QUANTIFICATION DE CHARGE

### 2.1 – Charge élémentaire

- ✓ **Fin du 19<sup>ème</sup> siècle** : on pensait que l'électricité est un fluide continue
- ✓ **Millikan** (prix Nobel 1923)

⇒ **Quantification** : fluide électrique de nature discrète

$$Q = n e$$

$e = 1.6\ 021892 \times 10^{-19}$  C charge élémentaire

Exemple : Lampe (100 W, 220 V) ⇒  $3 \times 10^{18}$  électrons/seconde

**La charge est une grandeur extensive** : La quantité d'électricité portée par un corps est la somme algébrique des quantités d'électricité des particules élémentaires qui le composent. **Elle est donc toujours un multiple de e.**

- ✓ **Depuis 1964** :

Existence de **quarks** : particules dont la charge est une fraction de e

## 2 – QUANTIFICATION DE CHARGE

### 2.2 – Propriétés des particules élémentaires

	Symbole	Charge	Masse (kg)
Électron (Z)	$e^-$	$-e$	$9.1093879 \cdot 10^{-31}$
Proton (Z)	$p$	$+e$	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$
Neutron (N)	$n$	$0$	$1.6729286 \cdot 10^{-27}$

✓ **Atome électriquement neutre** et constitué de 99.99 % de vide

✓ **Noyau atomique**  ${}^A_Z X_N$        $A = N+Z$  nombre de masse

➤ très dense :  $\approx 9 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$

➤ charge  $Q = +Z e$  avec une densité :  $\approx 10^{14} \text{ C/cm}^3$

# 3 – DISTRIBUTION DE CHARGE

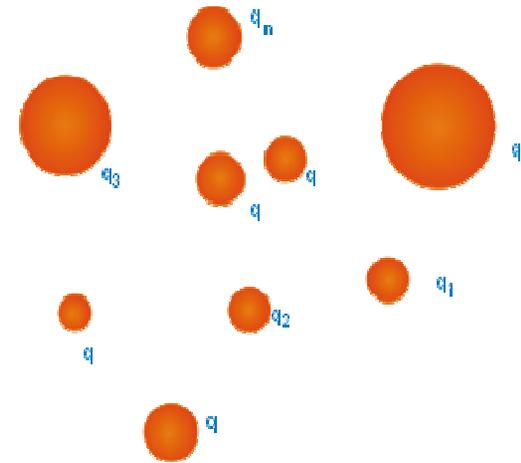
## 3.1 – Distribution discrète

Ensemble de charges **discernables** par l'observateur  $\Rightarrow$  **dénombrables** :  $q_1, q_2, \dots, q_n$

✓ La **charge** est une grandeur **additive** :

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n n_i e$$

$n_i$  : nombre de charges élémentaires portées par la particule  $i$

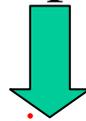


# 3 – DISTRIBUTION DE CHARGE

## 3.2 – Distribution continue

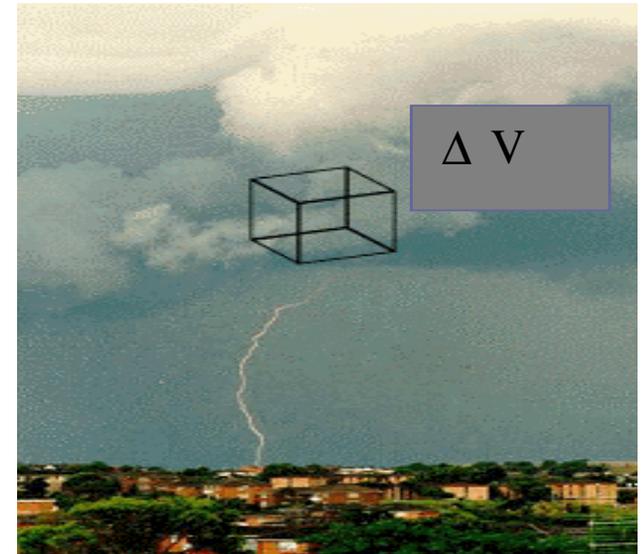
### 3.2.1 – Charge volumique

Le corps électrisé est un volume  $V$  contenant des charges indiscernables à l'échelle macroscopique.



Densité de charge volumique

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$



La charge totale est la somme algébrique des charges de chaque élément dans le volume :

$$Q = \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV = \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3r$$

Distribution uniforme  $\Rightarrow$  densité volumique moyenne :  $\rho = \bar{\rho} = \frac{Q}{V}$       Unité :  $C/m^3$

# 3 – DISTRIBUTION DE CHARGE

## 3.2.2 – Charge surfacique

Les charges sont **réparties sur une épaisseur  $L$**  très faible par rapport aux autres dimensions et peuvent donc être considérées comme réparties **en surface**.



Densité de charge surfacique  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} = \rho L$

La charge totale de la distribution :

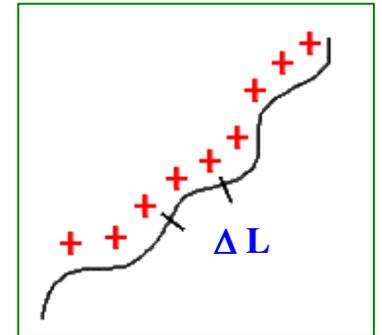
$$Q = \sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta S_i = \iint_S \sigma(\vec{r}) dS = \iint_S \sigma(\vec{r}) d^2r$$

Distribution uniforme  $\Rightarrow$  densité surfacique moyenne :  $\sigma = \bar{\sigma} = \frac{Q}{S}$   
Unité : C/m<sup>2</sup>

# 3 – DISTRIBUTION DE CHARGE

## 3.2.3 – Charge linéique

Les charges se répartissent dans le voisinage d'un fil de section  $s$  sur des distances très faibles devant sa longueur et devant la distance d'observation.



Densité de charge linéique

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL} = \rho \ s$$

La charge totale de la distribution :

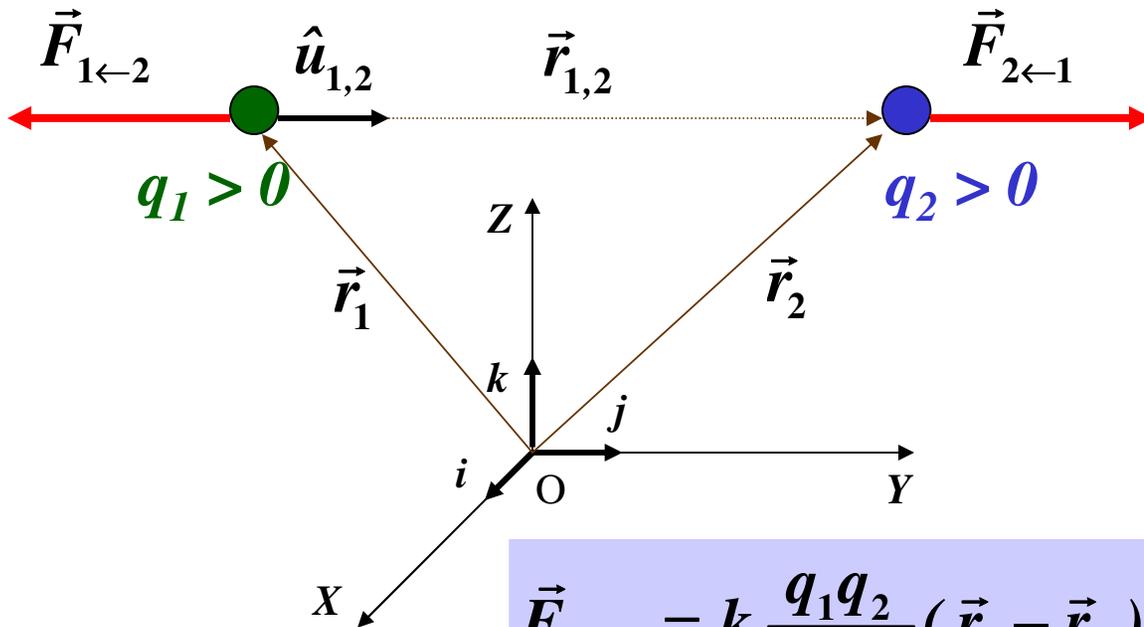
$$Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta L_i = \int_L \lambda(\vec{r}) \ dL = \int_L \lambda(\vec{r}) \ dr$$

Distribution uniforme  $\Rightarrow$  densité linéique moyenne  $\lambda = \bar{\lambda} = \frac{Q}{L}$   
Unité : C/m

# 4 – LOI DE COULOMB

## 4 – Loi de Coulomb

Deux **charges** électriques immobiles **s'attirent** ou **se repoussent** mutuellement avec une force proportionnelle au produit de la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.



$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{u}_{1,2}$$

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\hat{u}_{1,2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|}$$

$$\vec{F}_{1 \leftarrow 2} = k \frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = -\vec{F}_{1 \leftarrow 2}$$

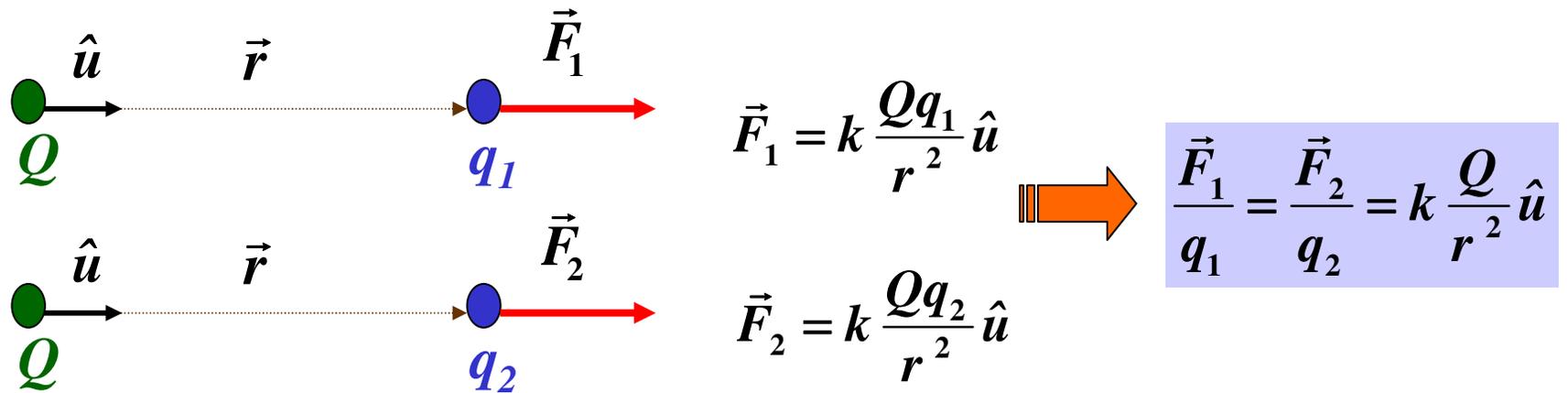
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ où } \epsilon_0 \text{ est la permittivité du vide} = 8,854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

# 5 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

## 5.1 – Définition

Lorsqu'on approche des charges  $q_1$  et  $q_2$  à une même distance  $r$  d'une charge source  $Q$  :



Le rapport  $F/q$  :

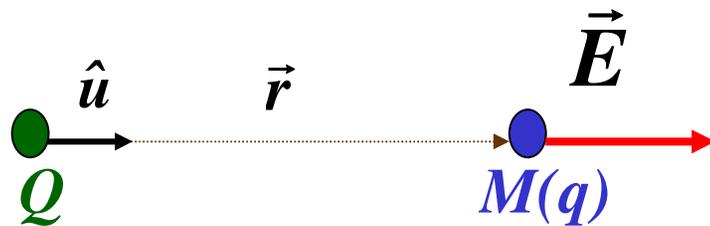
- ✓ indépendant de  $q_1$  ou  $q_2$
- ✓ ne dépend que de la charge source  $Q$  et de la distance  $r$

Champ  
électrostatique  
 $E$

# 5 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

## 5.2 – Relation champ-force

Le champ électrique traduit **localement** en tout point  $M$  la modification des **propriétés de l'espace** due à la présence d'une charge source.



$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{u}$$

✓ Unité dans SI : MKSA



$E$  est exprimé en  $V.m^{-1}$

La force électrostatique s'exerçant sur une charge cible  $q$  placée en  $M$  s'exprime alors par :

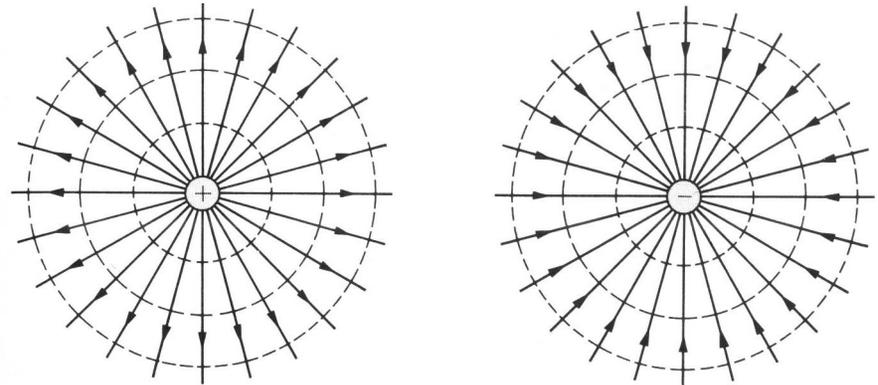
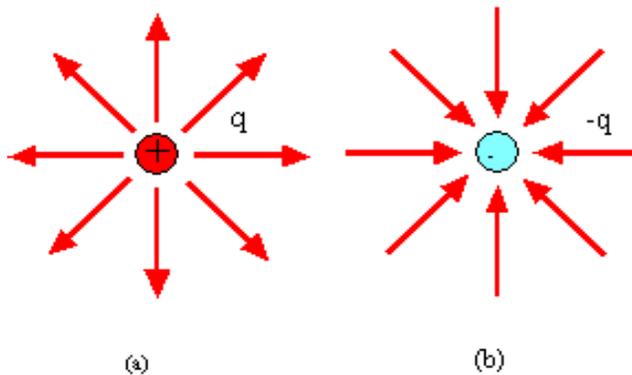
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

# 5 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

## 5.3 – Lignes de champs électriques (suite)

Le champ électrique est une fonction à valeurs vectorielles que l'on peut visualiser à l'aide de ses 'lignes de champs'. Les lignes de champs forment un ensemble de courbes orientées telles que leurs tangentes sont parallèles à  $E$ .

✓ Charges ponctuelles

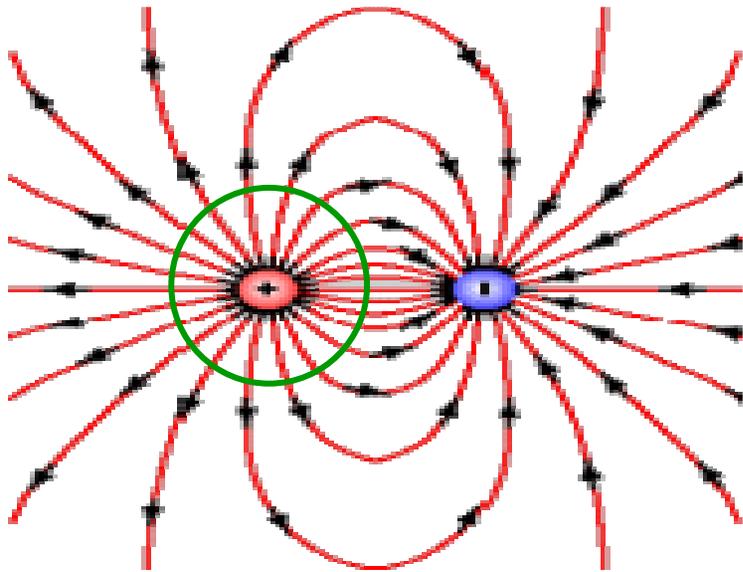


# 5 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

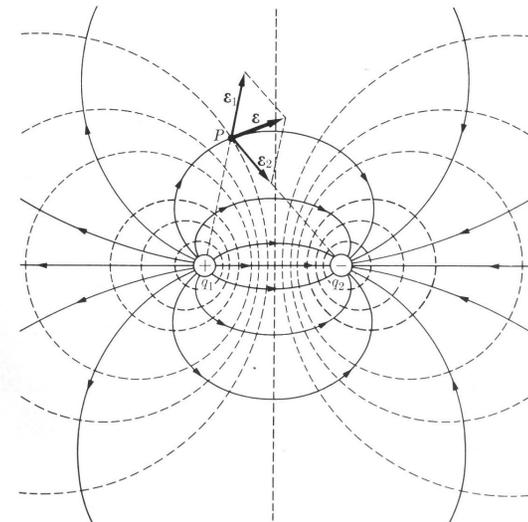
## – Propriétés des lignes de champs électriques

- i. Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper.
- ii. Elles peuvent aller à l'infini mais ne se ferment jamais.
- iii. Le nombre  $n$  de lignes traversant une surface unité est proportionnel au module du champ.

✓ Exemple : Dipôle électrique



$$n = \frac{N}{4\pi R^2}$$



# 6 – THEOREME DE SUPERPOSITION

## 6.1 – Cas d'une distribution discrète

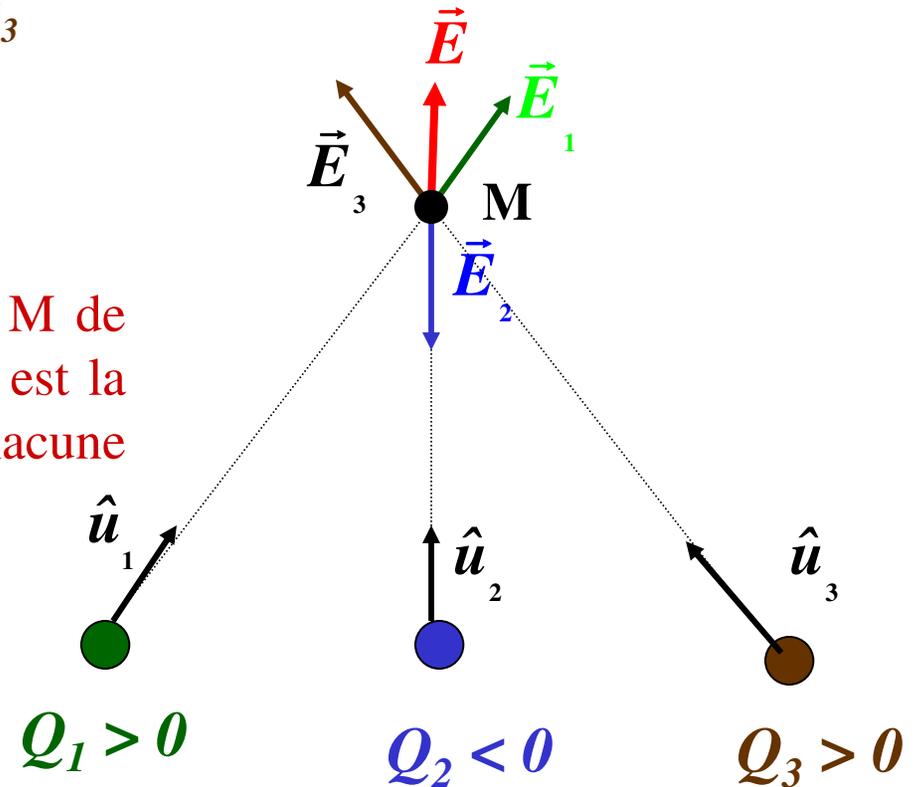
Soient trois charges ponctuelles  $Q_1, Q_2, Q_3$



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Le champ électrostatique créé en un point M de l'espace par une distribution  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  est la somme vectorielle des champs créés par chacune des charges  $Q_i$  :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$



## 6 – THEOREME DE SUPERPOSITION

### 6.2 – Cas d'une distribution continue

Lorsque les charges sont indiscernables, on découpe la source en éléments infiniment petits de charge  $dQ$



Chaque élément crée un champ élémentaire  $dE$  en un point M de l'espace.

Le champ total est l'intégrale :

$$\vec{E} = \int_{source} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{source} \frac{dQ}{r^2} \hat{u}$$

Permittivité du vide

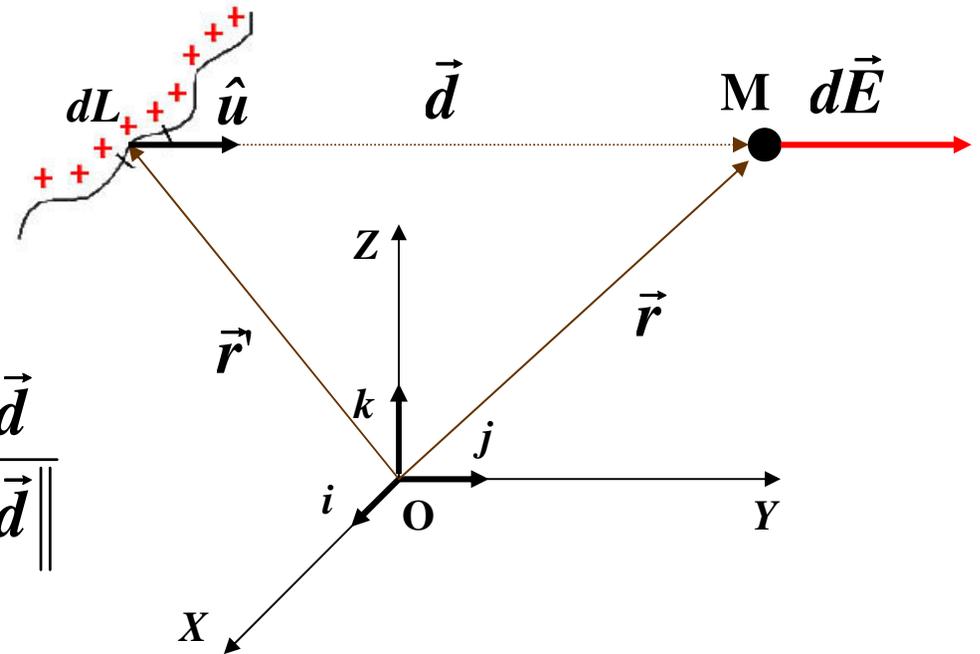
# 6 – THEOREME DE SUPERPOSITION

## 6.2.1 – Distribution linéaire

Champ élémentaire créé par  $dQ = \lambda dL$

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dL}{d^2} \hat{u}$$

$\hat{u} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$



Le champ total s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dr'$$

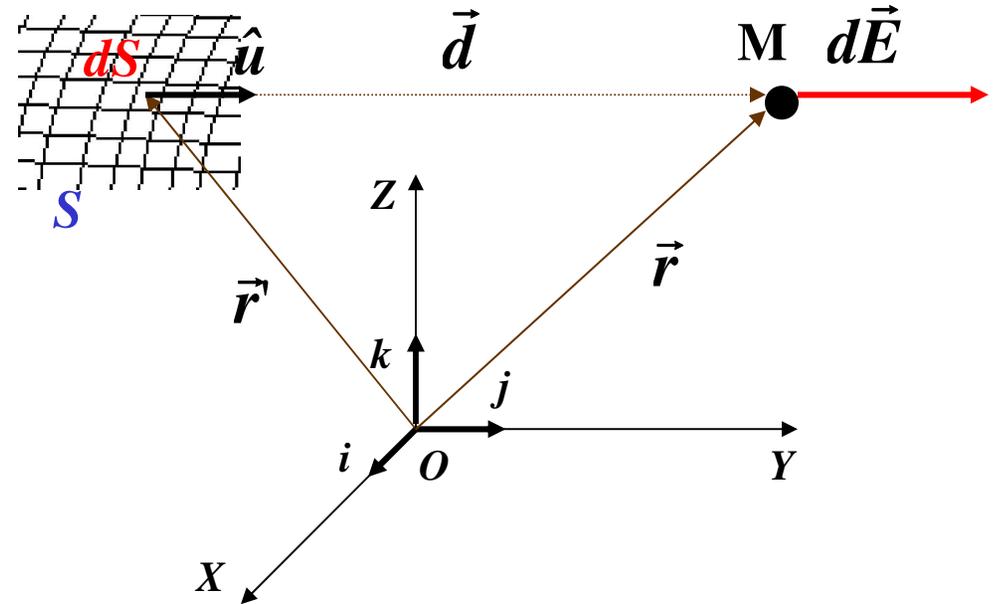
# 6 – THEOREME DE SUPERPOSITION

## 6.2.2 – Distribution surfacique

Champ élémentaire crée par  $dQ = \sigma dS$



$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{d^2} \hat{u}$$



Le champ total s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^2r'$$

# 6 – THEOREME DE SUPERPOSITION (

## 6.2.3 – Distribution volumique

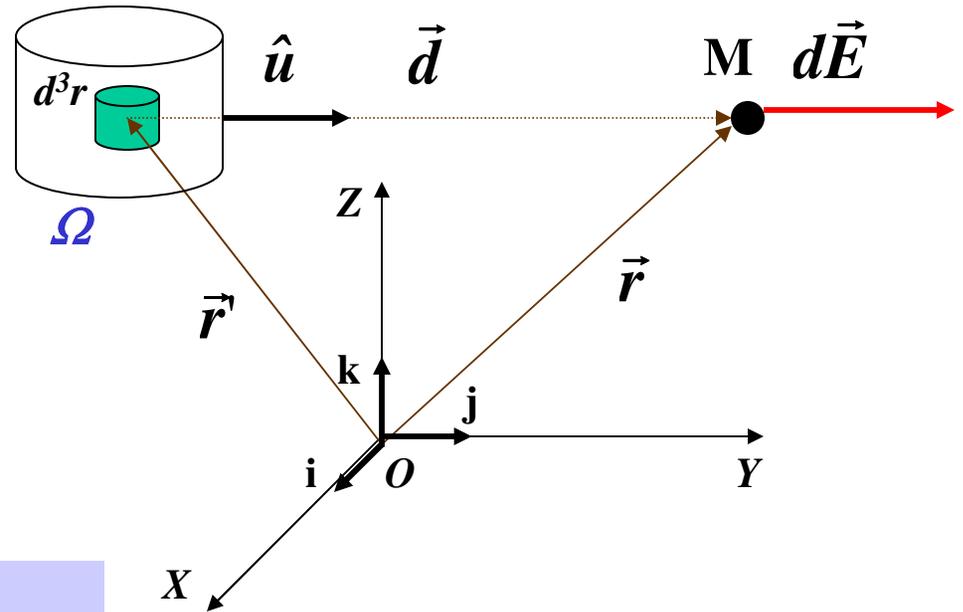
Champ élémentaire créé par  $dQ = \rho dv = \rho d^3r$

↓

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dv}{d^2} \hat{u}$$

Le champ total s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3r'$$



# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.1 – Élément de surface

✓ **Surface  $S$**  : juxtaposition d'un nombre infini d'éléments de surface  $dS$  dont l'aire se confond avec une portion du plan tangent à  $S$ .

✓ **Vecteur normale**   $d\vec{S} = dS \hat{n}$

➤ Origine : point M de l'élément

➤ Direction :  $\perp S$

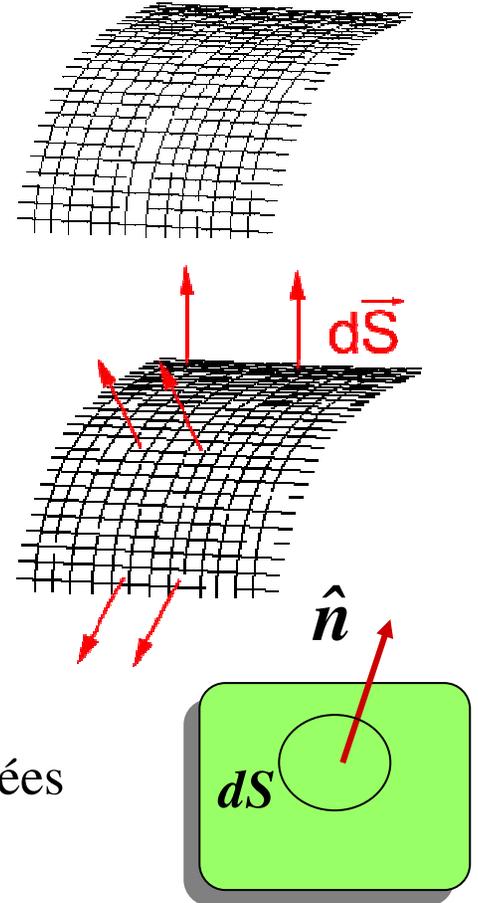
➤ Module : aire  $dS$

➤ Orientation : arbitraire

**Convention** : vers l'extérieur pour les surfaces fermées

**Méthode** : règle de **Maxwell** :

progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens (+)



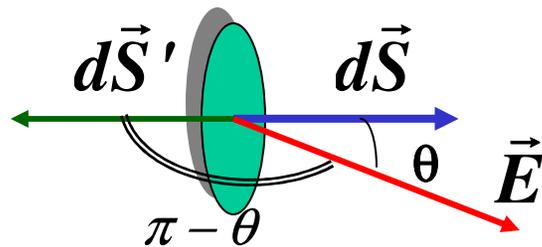
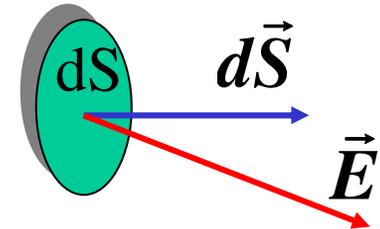
# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.2 – Notion de flux : propriété de tous les champs vectoriels

Le flux élémentaire  $d\Phi$  du champ  $E$  à travers l'élément de surface  $dS$  :

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS \cos \theta$$

son signe dépend du sens du vecteur  $dS$ .



$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \Rightarrow \vec{E}d\vec{S} = -\vec{E}d\vec{S}'$$

Le flux  $\Phi$  du champ électrique à travers la surface  $S$  :  $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

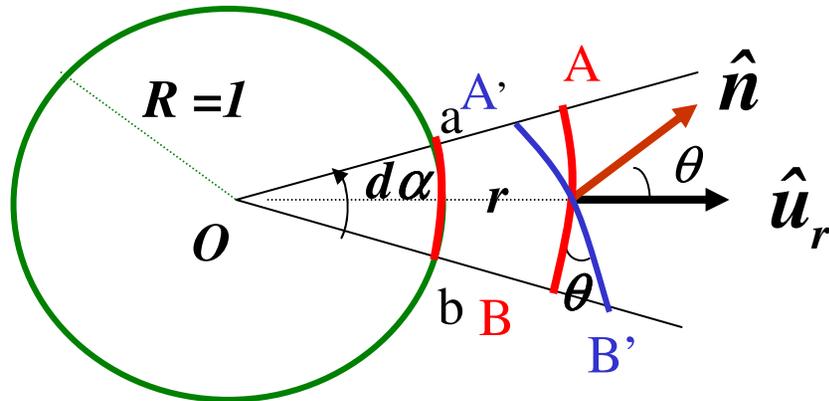
Unité : **V.m**

Pour faire ce calcul, les vecteurs associés aux éléments de surface sont tous orientés du même côté de la surface  $S$ .

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.3 – Angle dans le plan et angle solide

✓ Arc de courbure dans le plan

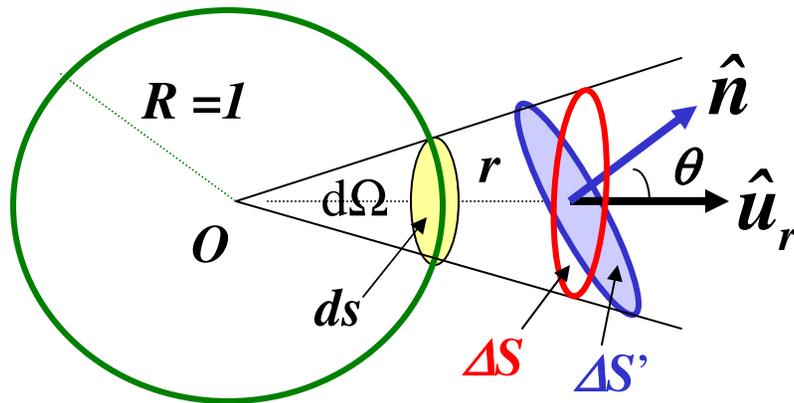


$$d\alpha = \frac{AB}{r} = \frac{A'B' \cos \theta}{r} = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \hat{u}_r}{r}$$

Unité : radian [rd]

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

✓ Angle solide dans l'espace : cône de sommet O



$$d\Omega = ds = \frac{\Delta S}{r^2} = \frac{\Delta S'}{r^2} \cos \theta = \frac{\Delta S'}{r^2} \hat{n} \cdot \hat{u}_r$$

Unité : stéradian [Srd]

$$0 \leq \Omega \leq 4\pi$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

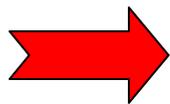
## 7.4 – Relation entre flux et angle solide

Soit une charge ponctuelle  $Q > 0$  placée en un point  $O$

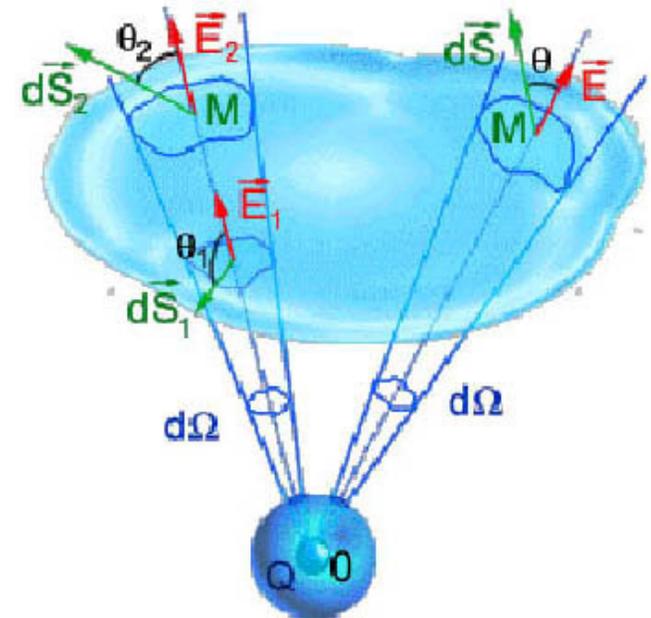
✓ Champ électrique : 
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}$$

✓ Flux  $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dS \cos \theta$

✓ Angle solide : 
$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$



$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



Pour une surface fermée : 
$$\oiint_S d\Omega = 4\pi$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.5 – Forme intégrale

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée  $S_G$  quelconque vaut  $1/\epsilon_0$  fois la charge algébrique totale, contenue dans le volume délimité par cette surface.

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$S_G$  : surface de Gauss

✓ Loi de superposition des champs

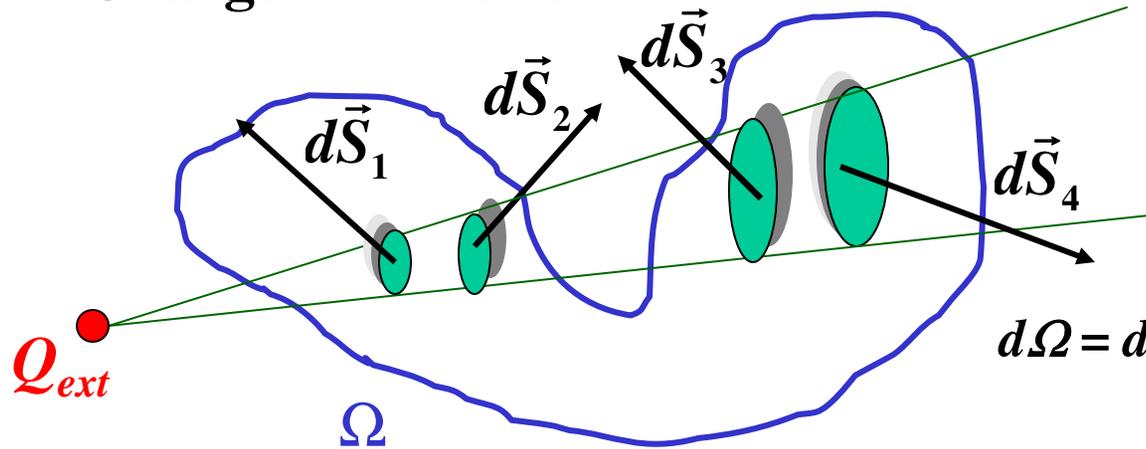
➤ Distribution discrète  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$   $\longrightarrow$  
$$\Phi = \oiint_{S_G} \sum_{i=1}^n \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i$$

➤ Distribution continue  $\longrightarrow$  
$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

✓ Si  $Q = 0$   $\longrightarrow$   $\Phi = 0$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## ✓ Charge à l'extérieur



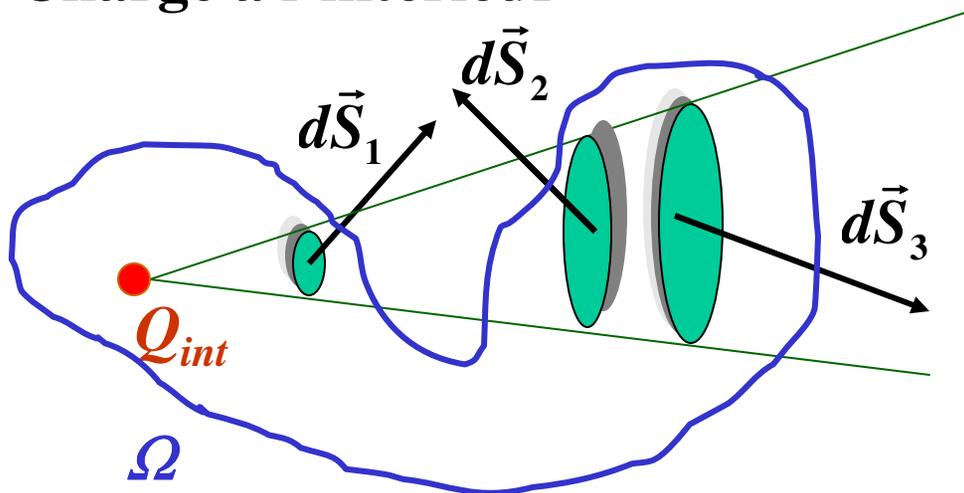
$$d\Omega_1, d\Omega_2, \dots, d\Omega_n$$

même module mais des signes alternativement négatifs et positifs

$$d\Omega = d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3 + \dots + d\Omega_n = 0$$



## ✓ Charge à l'intérieur



$$\Phi = 0 \text{ à travers } S$$



$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

Outil précieux pour déterminer le champ en tout point  $M$  lorsque les charges sources possèdent des symétries.

## Méthodologie

1. Trouver l'orientation du champ par des considérations de symétrie
2. Choisir une "surface de Gauss"  $S_G$  (imaginaire)
  - ✓ passant par le point d'étude  $M$
  - ✓ la plus adaptée, pour que l'expression du flux de  $\mathbf{E}$  à travers elle soit simple
  - ✓ possédant les propriétés de symétrie de la source
3. Exprimer le flux  $\Phi$  à travers la surface fermée  $S_G$
4. Déterminer la charge  $Q_{\text{int}}$  (intérieure) au volume délimité par  $S_G$
5. Appliquer le théorème de Gauss

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

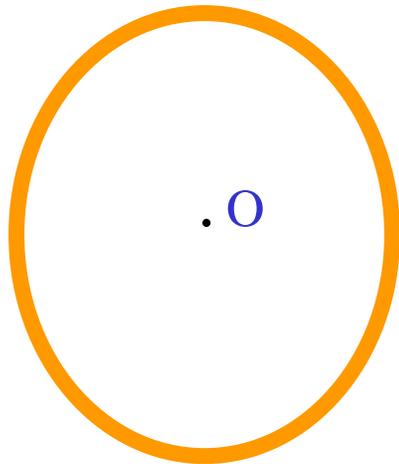
# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.6 - Applications

### 7.6.1 - Symétrie sphérique

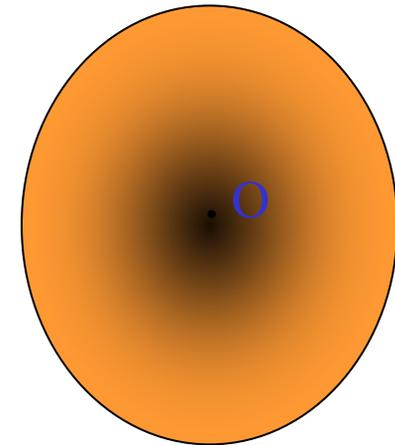
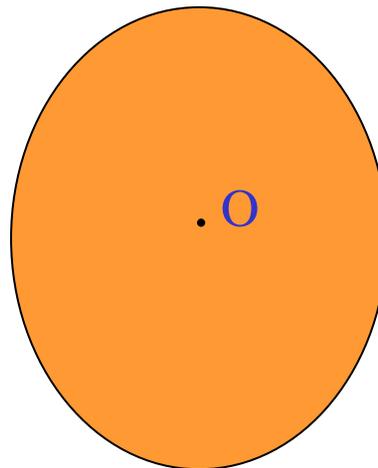
La densité de charges en un point  $M$  est uniquement fonction de la distance  $r$  à un centre  $O$  et ne dépend pas de la direction  $OM$ .

Exemples :



Sphère uniformément chargée en surface

Sphère de densité de charge volumique  $\rho = Cte$

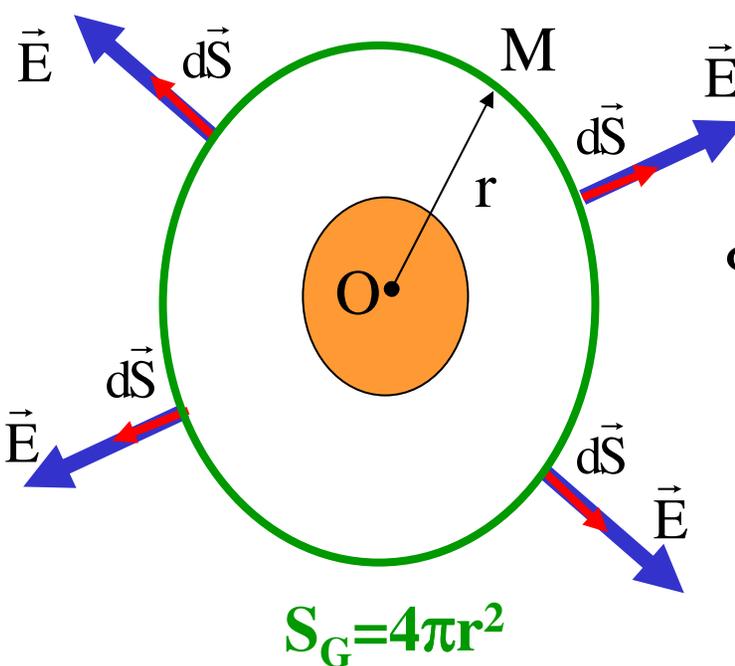


Sphère de densité de charge volumique  $\rho = f(r)$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

✓ Symétrie géométrique  $\Rightarrow$  Champ radial  $E=f(r)$

✓ Surface de Gauss la plus adaptée : sphère centrée sur O et passant par le point d'étude M (celui-ci peut être intérieur ou extérieur à la source).



$\vec{E} // d\vec{S} \quad \|\vec{E}\| = \text{Cte} \quad \forall \quad M$

$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_G} E \cdot dS = E \oiint_{S_G} dS = ES_G$

Théorème de Gauss  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

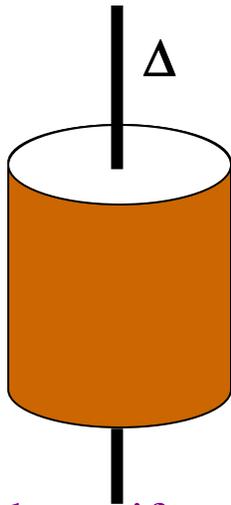
$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{int}}}{r^2}$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.6.2 - Symétrie axiale

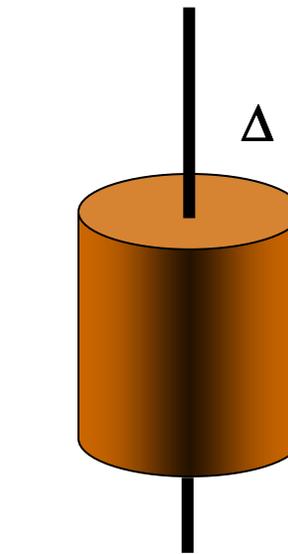
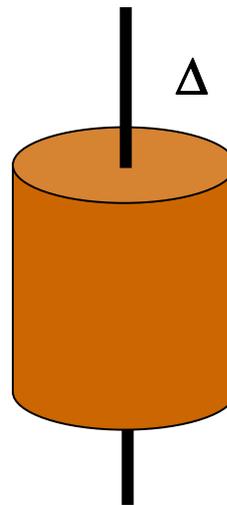
La densité de charges en un point  $M$  est uniquement fonction de la distance  $r$  par rapport à un axe de symétrie.

Exemples :



Cylindre uniformément chargé en surface

Cylindre de densité de charge volumique  $\rho = Cte$



Cylindre de densité volumique  $\rho = f(r)$

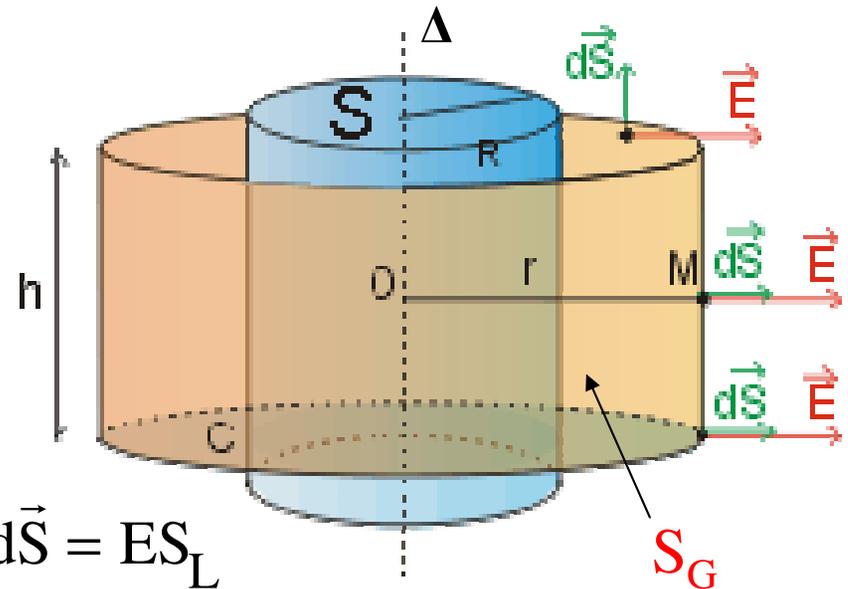
# 7 – THEOREME DE GAUSS

✓ Symétrie géométrique  $\longrightarrow$  Champ radial

✓ Surface de Gauss la plus adaptée : cylindre axé sur  $\Delta$  et passant par le point d'étude M.

✓ Sections droites :  $S_D = \pi r^2$      $\vec{E} \perp d\vec{S}$

✓ Surface latérale :  $S_L = 2\pi r h$      $\vec{E} // d\vec{S}$



$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_D} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_L$$

Théorème de Gauss  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \longrightarrow$

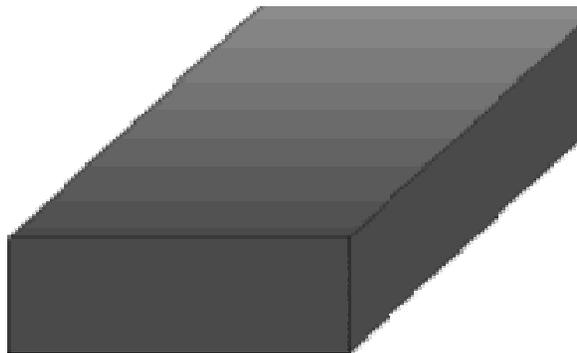
$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi\epsilon_0 r h}$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

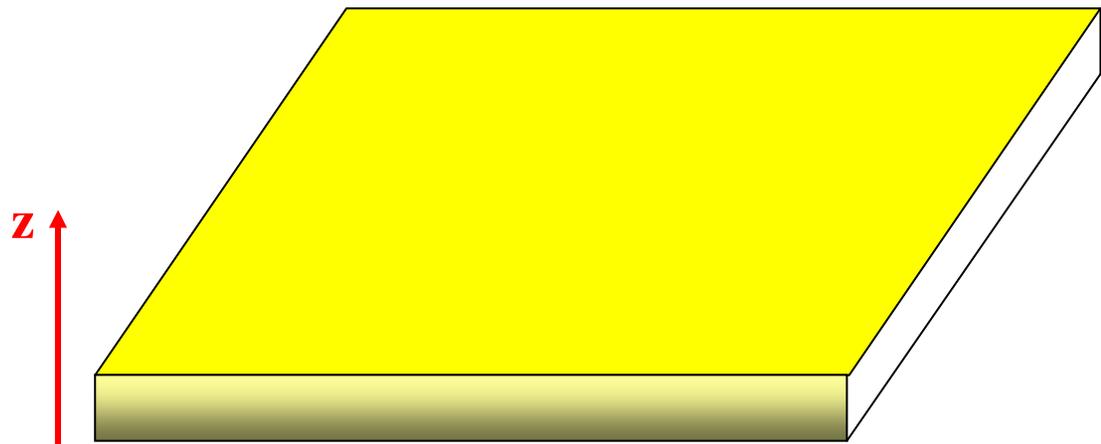
## 7.6.3 - Symétrie planaire

La densité de charges en un point M est uniquement fonction de la distance  $z$  à un plan  $P$ . Tout axe orthogonal au plan  $P$  est axe de symétrie.

Exemples :



Plaque uniformément chargée



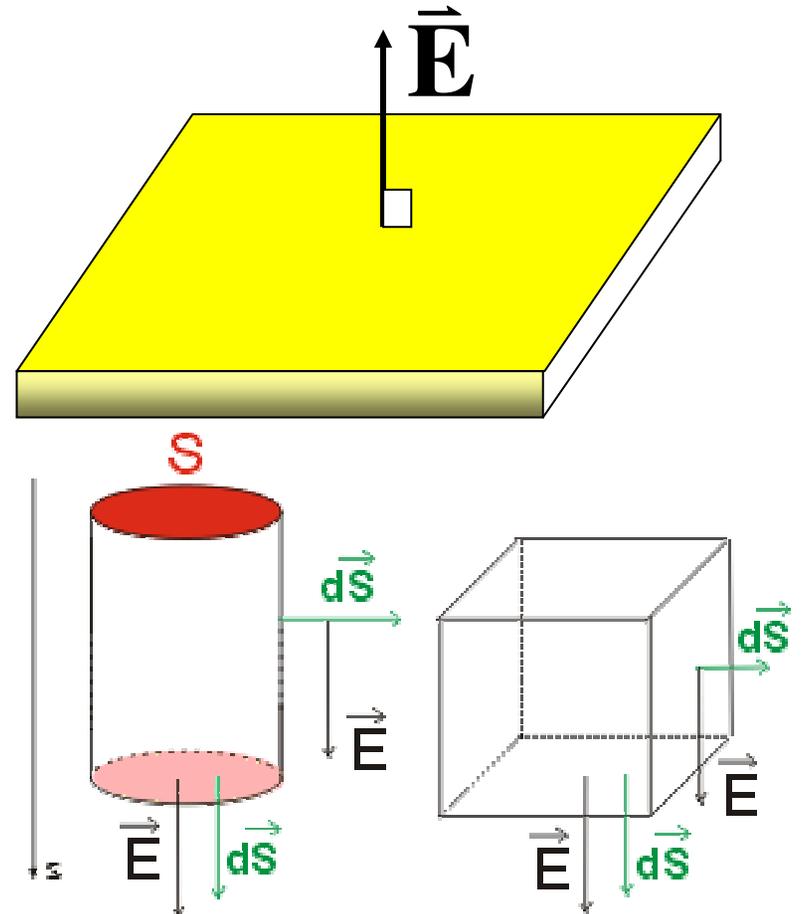
Plaque de densité de charge volumique  $\rho = f(z)$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

✓ Champ  $\mathbf{E}$  est orthogonal au plan de symétrie

✓ Surface de Gauss la plus adaptée est toute surface :

- Parois latérales sont tangentes à  $\mathbf{E}$
- Sections droites  $S //$  au plan de symétrie



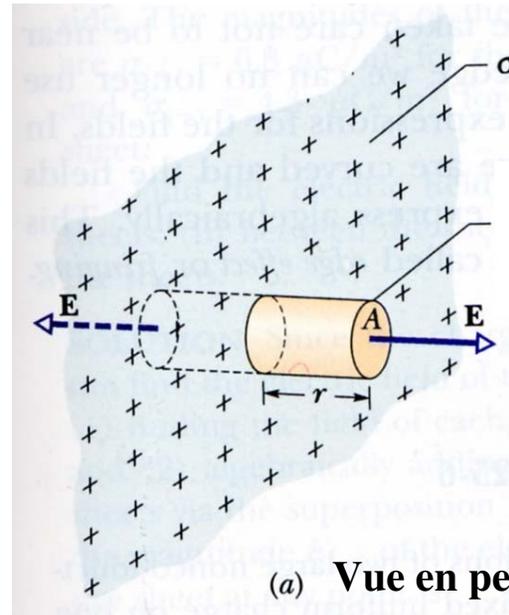
Le flux se réduit au flux à travers les sections droites et prend une expression simple puisque par symétrie  $\mathbf{E}$  est le même en tout point de ces surfaces.

# 7 – THEOREME DE GAUSS

Théorème de Gauss:

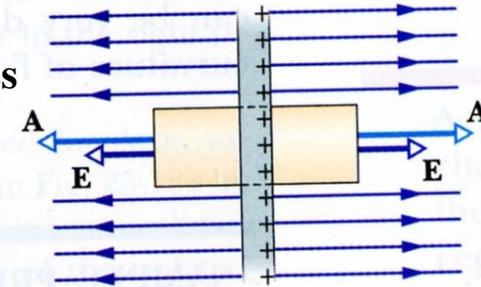
$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$A_1 = A_2 = \pi R^2$$



(a) Vue en perspective

Surface de Gauss



(b) Vue de côté

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_{A_1} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{A_2} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{A_L} \vec{E} d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_{A_1} E dS + \iint_{A_2} E dS = 2E\pi R^2 \text{ car } \vec{E} \parallel \vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2 \text{ et } \vec{E} \perp \vec{A}_L \text{ et } Q_{int} = \pi R^2 \sigma$$



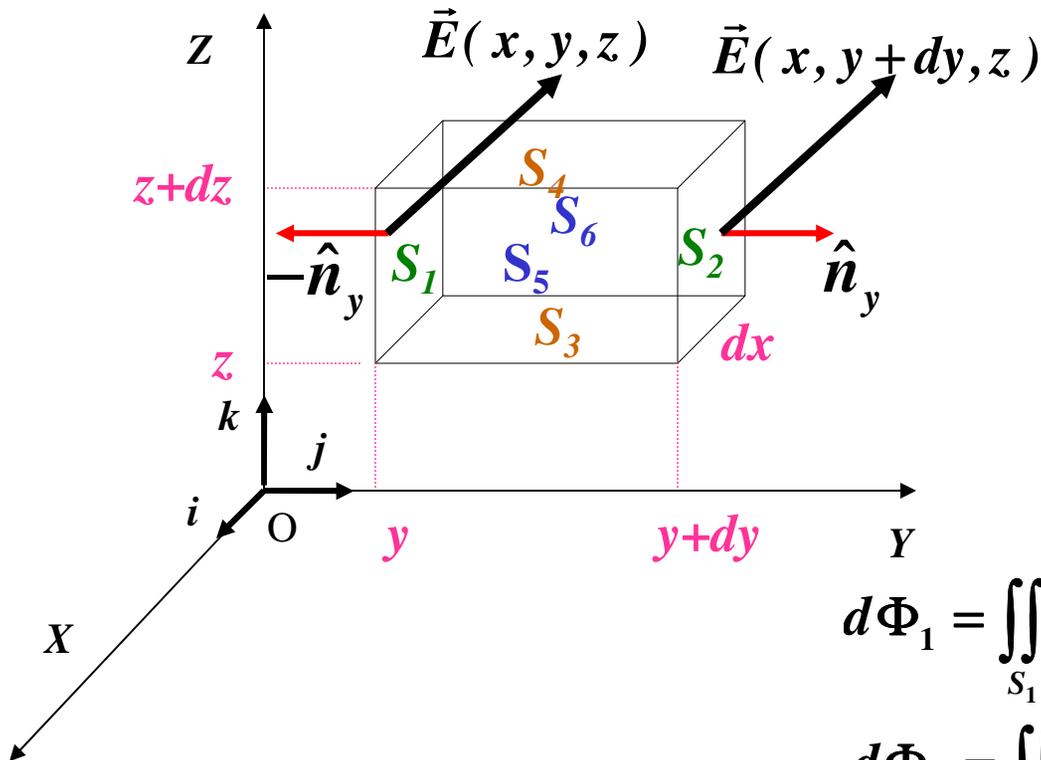
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.7 - Forme différentielle du flux

Soit un élément de volume élémentaire  $dv = dx.dy.dz$  placé dans un champs électrique  $\mathbf{E}$ . Les arrêtes sont parallèles aux axes d'un repère cartésien  $(O, i, j, k)$ .

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{i} + E_y(x, y, z)\hat{j} + E_z(x, y, z)\hat{k}$$



$d\Phi_i$  : Flux sur une face  $i$

$$d\Phi = \sum_{i=1}^6 d\Phi_i$$

$$d\Phi_y = d\Phi_1 + d\Phi_2$$

$$d\Phi_z = d\Phi_3 + d\Phi_4$$

$$d\Phi_x = d\Phi_5 + d\Phi_6$$

$$d\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\vec{E}(x, y, z) \cdot \hat{n}_y dx dz$$

$$d\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = +\vec{E}(x, y + dy, z) \cdot \hat{n}_y dx dz$$

## 7 – THEOREME DE GAUSS

✓ Flux à travers les deux faces  $\perp$  à  $OY$  :

$$d\Phi_y = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \left[ E_y(x, y + dy, z) - E_y(x, y, z) \right] dx dz = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz$$

✓ Flux à travers les deux faces  $\perp$  à  $OZ$  :

$$d\Phi_z = d\Phi_3 + d\Phi_4 = \left[ E_z(x, y, z + dz) - E_z(x, y, z) \right] dx dy = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz$$

✓ Flux à travers les deux faces  $\perp$  à  $OX$  :

$$d\Phi_x = d\Phi_5 + d\Phi_6 = \left[ E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z) \right] dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

Le flux total de  $E$  à travers les 6 faces du volume  $dv = dx dy dz$

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dx dy dz$$

# 7 – THEOREME DE GAUSS

## 7.8 - Théorème de la divergence :

Par définition on appelle divergence d'un vecteur champs électrique :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$



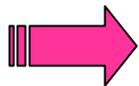
flux élémentaire

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r$$

En tenant compte de la forme intégrale du théorème de Gauss:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d^3r$$

Théorème d'Ostrogradsky-Green  
(Théorème de la divergence) :  
applicable à tout champ vectoriel



$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Forme locale du théorème de Gauss**

## 7 – THEOREME DE GAUSS

### Signification physique de la divergence :

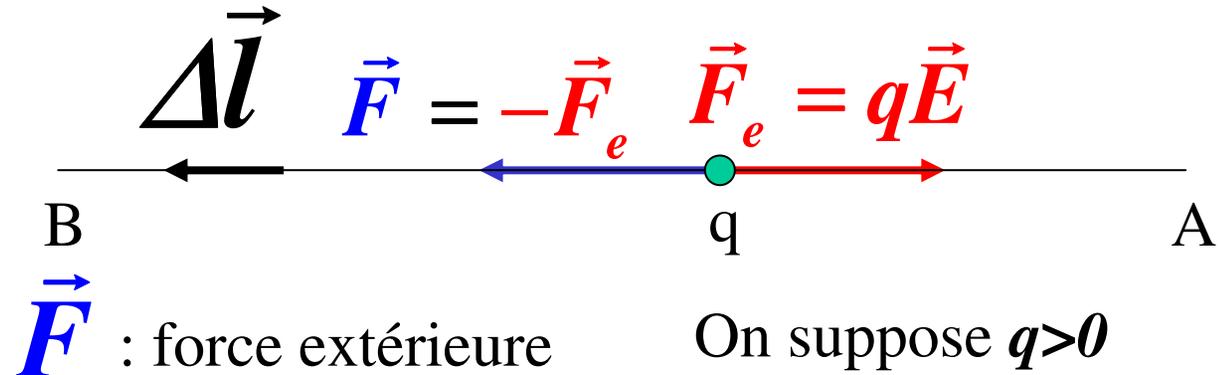
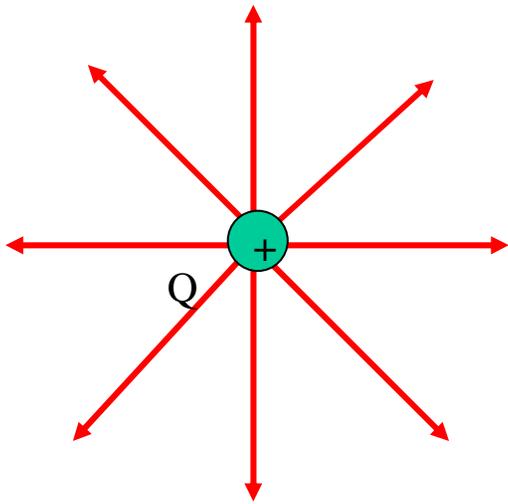
Si le volume est divisé par un facteur  $n$ , la surface qui le délimite est également divisée par le même facteur.

$$\frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \rightarrow \text{une limite finie quand } \Delta v \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} = \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.1 – Définition



Pour empêcher la charge  $q$  d'accélérer, il faut lui appliquer une force  $\vec{F} = -\vec{F}_e$

Si la force extérieure  $\vec{F}$  déplace la charge  $q$  d'une distance  $\Delta\vec{l}$  le long de AB, L'agent extérieur fournit un travail

$$\Delta W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

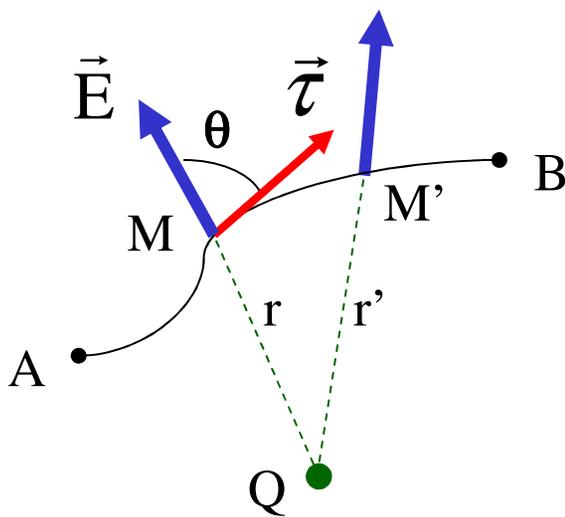
$$\frac{W_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_A$$

C'est la définition de la différence de potentiel entre A et B

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.2 – Circulation du vecteur champ électrique

Dans un déplacement fini le long d'un arc de courbe entre deux points AB, l'intégrale curviligne I du champ vectoriel  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  est appelée **circulation de E**.



$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{L} = dL\vec{\tau} \quad \longrightarrow \quad dI = \vec{E}(M) \cdot d\vec{L} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dL \cos \theta}{r^2}$$

$$dr = dL \cos \theta \quad \longrightarrow \quad dI = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$I = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Cette quantité **ne dépend que de A et B** et non du chemin parcouru entre ces points. C'est une propriété de tout **champ vectoriel qui dérive d'un potentiel scalaire**.

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.3 – Potentiel créé par une charge ponctuelle

On introduit le potentiel scalaire électrique  $V$  dont la variation représente le travail d'une force opposée à la force de Coulomb dans le déplacement d'une charge unité.

✓ Le potentiel en  $M$  ne peut être défini que par référence à un autre point  $O$  :

$$V = -\int_O^M \vec{E} \cdot d\vec{L} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + V_0$$

On prend souvent le point de référence à l'infini  $V(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$   
(car, en général,  $q=0$  à l'infini)

✓ Le potentiel créé par une charge ponctuelle, s'il n'existe pas de charge à l'infini :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Unité : Volt [V]

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.4 – Potentiel créé par une distribution de charges

### ✓ Cas de distribution discrète

Un ensemble dénombrable de charges ponctuelles  $\{q_i\}_{i=1, N}$  localisées en des points  $\{A_i\}_{i=1, N}$  crée en un point M un champ somme vectorielle des champs  $\vec{E}_j$  créés par chacune des charges.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad V_B - V_A = - \int_A^B \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{L} = \sum_{i=1}^N (V_{i,B} - V_{i,A})$$

Le potentiel est une fonction additive : c'est la somme algébrique des potentiels créés par chaque charge considérée isolément.

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## ✓ Cas de distribution continue

Le passage à la distribution continue s'effectue en remplaçant le signe  $\Sigma$  par l'intégration sur le domaine dans lequel sont distribuées les charges.

### ✓ Distribution linéique



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dr'$$

### ✓ Distribution surfacique



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^2r'$$

### ✓ Distribution volumique



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3r'$$

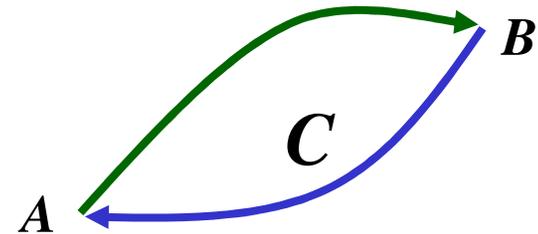
# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.5 – Théorème de circulation de $E$ le long d'un contour fermé

### 8.5.1 – Forme intégrale

$$A \rightarrow B \quad \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_A^B dV = V_A - V_B$$

$$B \rightarrow A \quad \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_B^A dV = V_B - V_A$$



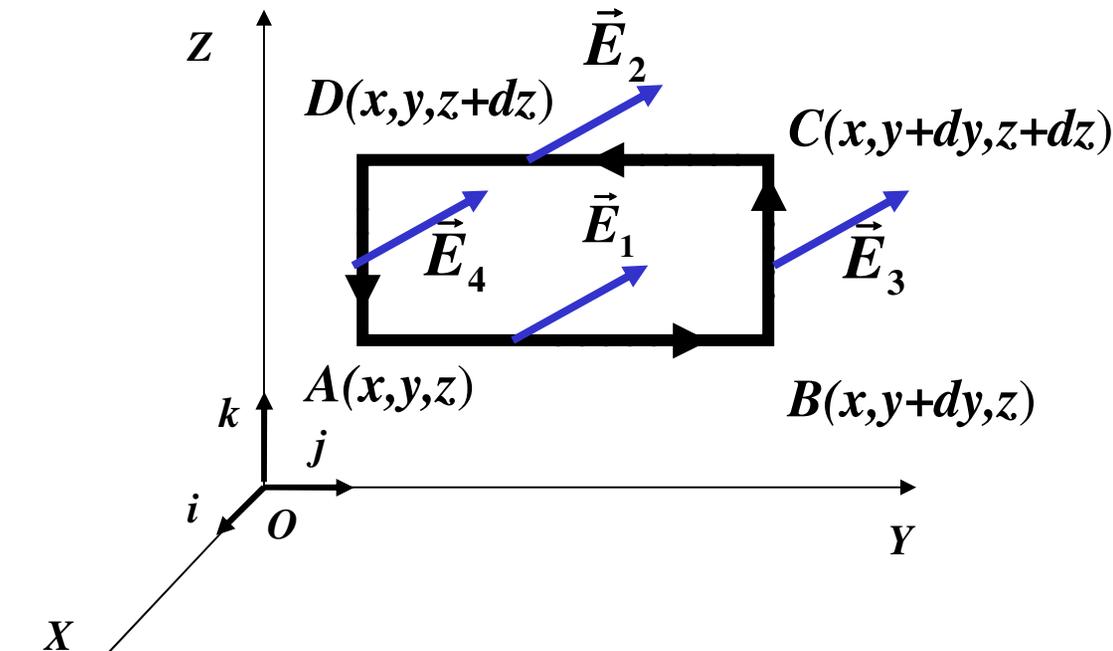
La circulation d'un champs vectoriel  $E$  le long d'une courbe fermée  $C$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$

**Conclusion:** La circulation d'un champ vectoriel  $E$  qui dérive d'un potentiel, le long d'une courbe fermée, est nulle.

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.5.2 – Forme différentielle ou locale



1 :  $A \rightarrow B$

2 :  $C \rightarrow D$

3 :  $B \rightarrow C$

4 :  $D \rightarrow A$

$$\int_{1 \text{ et } 2} \vec{E} \cdot d\vec{L} = [E_y(x, y + \frac{dy}{2}, z) - E_y(x, y + \frac{dy}{2}, z + dz)] dy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dz dy$$

$$\int_{3 \text{ et } 4} \vec{E} \cdot d\vec{L} = [E_z(x, y + dy, z + \frac{dz}{2}) - E_z(x, y, z + \frac{dz}{2})] dz = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy dz$$

## 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

Circulation de  $\vec{E}$  le long du contour fermé ABCDA ( $dydz$ )

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{L} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dydz = 0$$

On définit la quantité entre parenthèses comme étant la composante, suivant l'axe  $Ox$ , du vecteur rotationnel de  $\vec{E}$ :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \Big|_x = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Big|_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

De même en considérant les contours  $dzdx$  et  $dx dy$  on obtient, respectivement, les composants  $y$  et  $z$  du vecteur rotationnel de  $\vec{E}$ :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \Big|_y = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Big|_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \Big|_z = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Big|_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

✓ Définition du rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

**Exemple :**  $\vec{E} = 3x^2 y \hat{i} - 2yz^3 \hat{j} + x^2 y \hat{k}$  Calculer  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$  en  $M(1, 2, 0)$

$$E_x = 3x^2 y$$

$$E_y = -2yz^3$$

$$E_z = x^2 y$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} x^2 + 6yz^2 \\ -2xy \\ -3x^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(M) = 6\hat{i} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M) = \hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

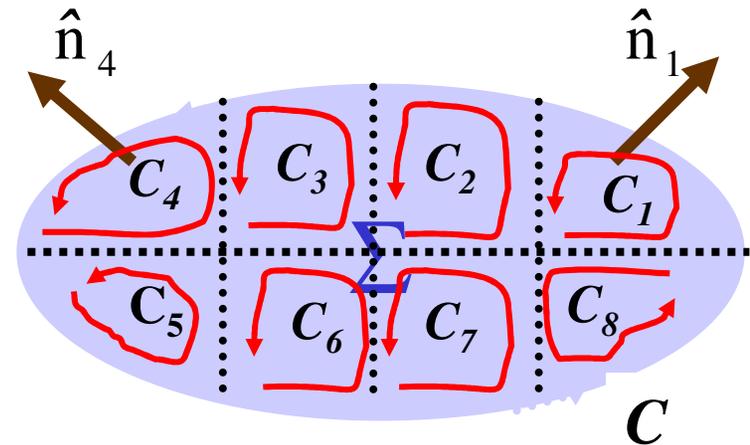
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M) \perp \vec{E}(M)$$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## ✓ Théorème de Stokes

Soit  $\vec{E}(x, y, z)$  un vecteur champs électrique traversant une surface  $\Sigma$  délimitée par un contour fermé  $C$ .

On découpe  $\Sigma$  en  $N$  surfaces orientées.



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = \oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{L} + \oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{L} + \dots = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$d\vec{S} = dS \hat{n}$$

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \oint_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{L} = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \cdot d\vec{S} = d\Phi$$

$\hat{n}$  : vecteur unitaire de la surface  $dS_i$

Théorème du rotationnel (Stokes)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

# 8 – POTENTIEL ELECTRIQUE

## Gradient d'une fonction

Soit une fonction scalaire  $f(x, y, z)$ , sa variation  $\Delta f$  est:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad + f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) \\ &\quad + f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y + \theta_2 \Delta y, z + \Delta z)}{\partial y} \Delta y \\ &\quad + \frac{\partial f(x, y, z + \theta_3 \Delta z)}{\partial z} \Delta z \quad (0 < \theta_i < 1)\end{aligned}$$

(Théorème des accroissements finis)

$$\frac{\partial f(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon_1 \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$$

**Définition:**  $df = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz$

## 8 – POTENTIEL ELECTRIQUE

### Gradient d'une fonction (suite)

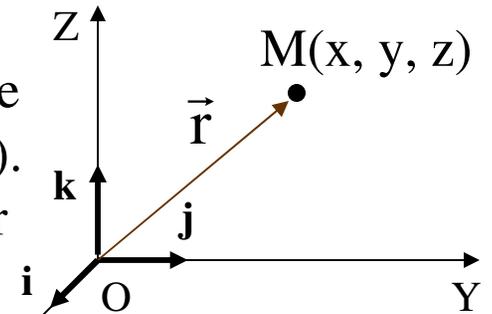
$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz \\&= \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \hat{k} \right) (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\&= \left[ \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) \right] \cdot d\vec{l} = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \stackrel{\text{Déf}}{=} \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

# 8 – POTENTIEL ELECTRIQUE

## Gradient d'une fonction (suite)

Soit une fonction scalaire  $f(x, y, z)$ . On cherche le lieu géométrique où  $f(x,y,z)=\text{constante}$  (le lieu géométrique est une surface fermée). Pour simplifier, on trace ce lieu géométrique à 2 dimensions. Pour chaque valeur de la constante on obtient des courbe fermée.

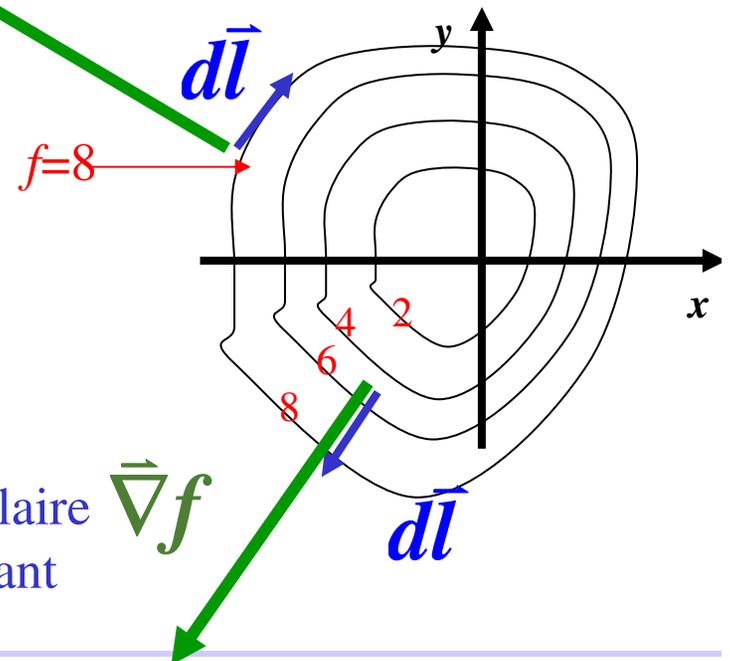


$$df = \vec{\nabla}f(x, y, z) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}f \perp d\vec{l}$$

On considère maintenant une variation maximale de  $f$ :

$$df = \vec{\nabla}f(x, y, z) \cdot d\vec{l} = \text{maximum}$$

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) \parallel d\vec{l}$$



**Conclusion :** Le gradient d'une fonction est perpendiculaire à la surface définie par  $f=\text{constante}$ , et il est orienté suivant les valeurs croissantes de  $f$ .

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## ✓ Théorème du gradient

Le potentiel  $V$  peut être défini par intégration de  $E$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_A^B dV = V_A - V_B \quad \longrightarrow \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{L}$$

Pour définir  $E$  à partir de  $V$  :

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

$$d\vec{L} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad \longrightarrow \quad dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\text{Or } V = V(x, y, z) \quad \longrightarrow \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\longrightarrow \quad \vec{E} = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\vec{\nabla} V$$

Gradient : opérateur qui décrit la variation spatiale du potentiel

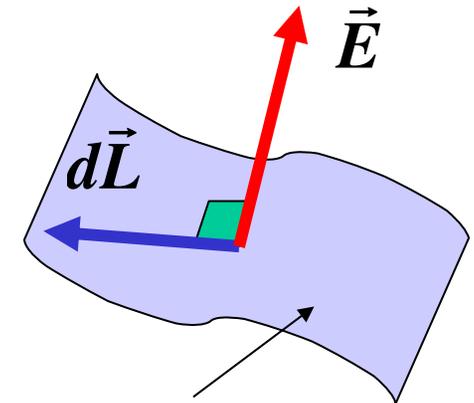
# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.6 – Surfaces équipotentielles

Lieux géométriques des points tels que  $V = Cte$

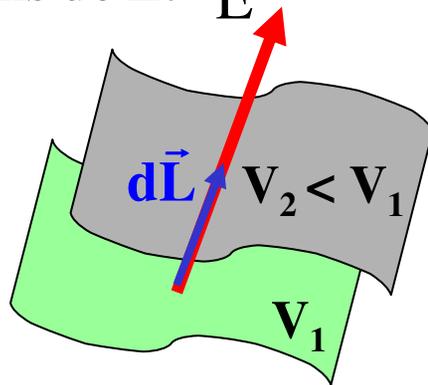
$\Rightarrow dV = 0$  entre deux points de la surface

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{L} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{L}$$



Surface équipotentielle

Direction et sens de  $E$ :  $\vec{E}$



Equation de lignes de champs

$$\vec{E} \parallel d\vec{L}$$



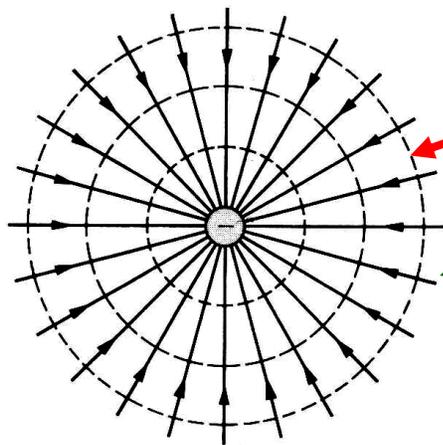
$$\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz}$$

$$dV = -\vec{E}d\vec{L} = -E dL < 0$$

**Conclusion :**  $E$  est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et est orienté suivant les potentiels décroissants.

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

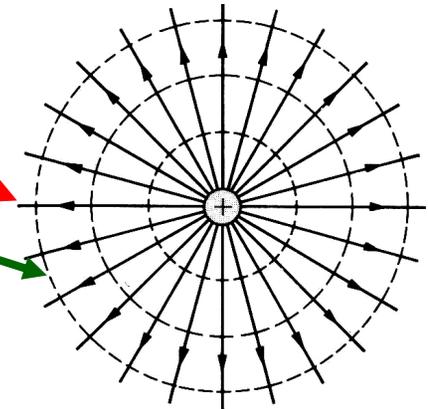
Exemples :



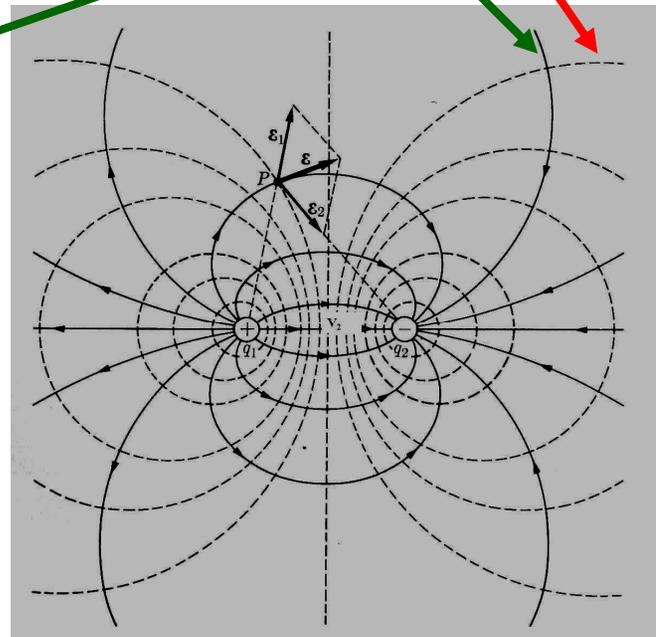
Monopôle  $Q < 0$

Surface équipotentielle

Ligne de champ



Monopôle  $Q > 0$



Dipôle  $(Q, -Q)$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

## 8.7 – Equation de Laplace et Poisson

Le champ électrique est décrit par 2 équations locales statiques ::

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Laplacien de  $V$

**Exemple :**  $V(x, y, z) = 2yx^2 + 3y^2 + xz^2$

$$\Delta V = 4y + 6 + 2x = 2(x + 2y + 3)$$

# 8 – POTENTIEL ÉLECTRIQUE

- ✓ Un champ qui dérive d'un potentiel scalaire a un Rotationnel nul,
  - ⇒ sa circulation le long d'un contour fermé est nulle
  - ⇒ sa circulation le long d'un arc de courbe entre deux points ne dépend que des points et non du chemin qui les relie.
- ✓ Les 2 équations du champ se réduisent à une seule équation pour le potentiel :

Equation de Poisson



$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Relation **locale** entre  $V$  et la densité de charge et prend la forme simple de l'équation de Laplace quand cette densité est nulle.

Equation de Laplace



$$\Delta V = 0 \quad \rho = 0 \text{ dans le vide}$$

# 9 – APPLICATION: DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.1 – Développement limité d'une fonction

La pente de la tangente en  $x_0$  à la fonction  $f(x)$  est:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et son équation est:

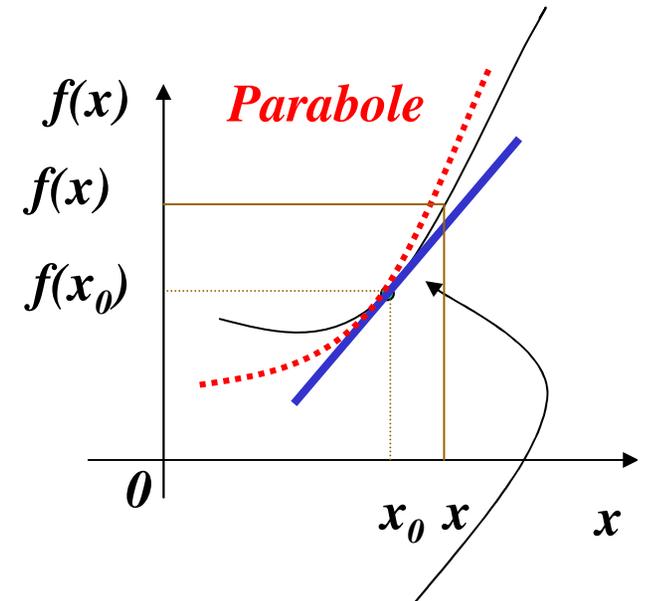
$$y = ax + b = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0)$$

A l'ordre 1, la fonction  $f(x)$  est représentée autour du point  $x_0$  par la tangente au point  $x_0$ :

$$f(x) \simeq f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0)$$

A l'ordre 2, la fonction  $f(x)$  est représentée autour du point  $x_0$  par une parabole :

$$f(x) \simeq f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2$$



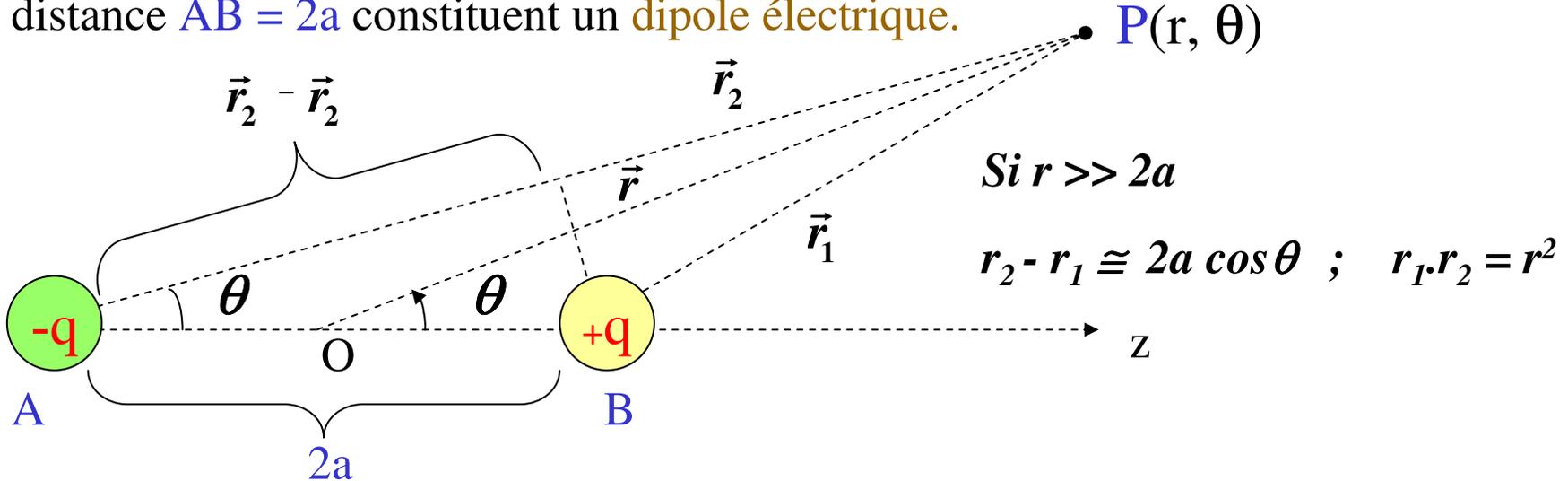
*tangente à la courbe  $f(x)$  au point  $x_0$*

*Le terme quadratique approxime la courbure de  $f(x)$*

# 9 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.2 Le potentiel d'un dipôle électrique

Deux charges de même grandeurs et de signes opposées ( $\pm q$ ), séparées par une distance  $AB = 2a$  constituent un **dipôle électrique**.



Si  $r \gg 2a$

$$r_2 - r_1 \cong 2a \cos \theta ; \quad r_1 r_2 = r^2$$

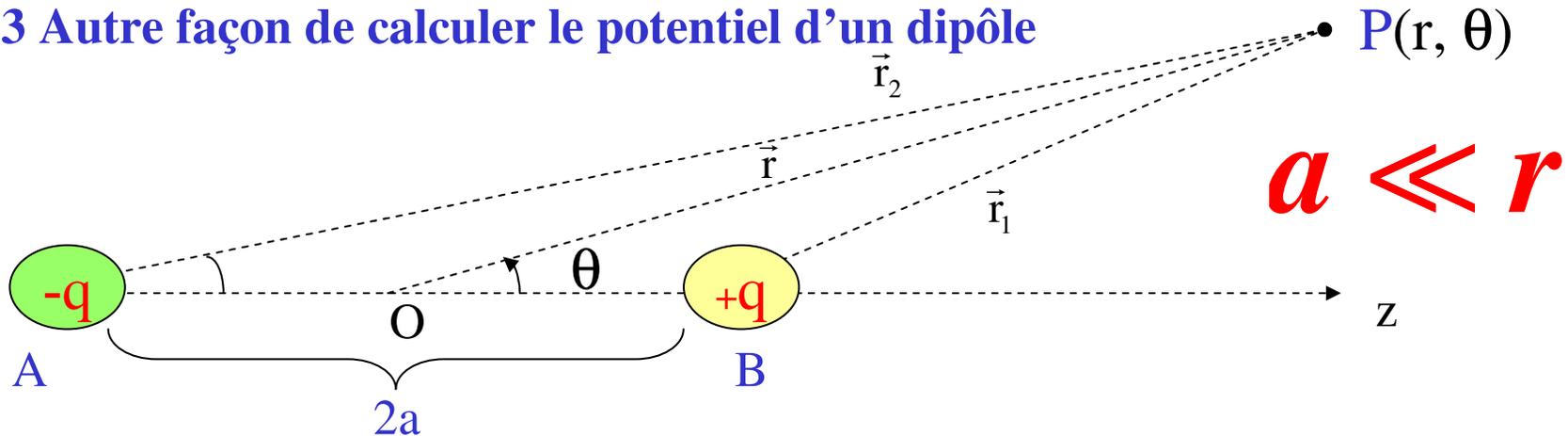
Par symétrie, le potentiel  $V$  ne change pas si on fait tourner  $P$  autour de Oz en gardant  $r$  et  $\theta$  fixes.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{+q}{r_1} + \frac{-q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

**Moment dipolaire électrique :**  $\vec{p} = (2a)q \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$   $\longrightarrow$   $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

# 9 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.3 Autre façon de calculer le potentiel d'un dipôle



$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \quad \text{et} \quad r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta \quad \text{et}$$

$$(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon \quad \text{Si} \quad \varepsilon \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \approx (r^2 - 2ar \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r_2} = (r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \approx (r^2 + 2ar \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{+q}{r_1} + \frac{-q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \left( \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \theta \right) - \left( \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} \cos \theta \right) \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a}{r^2} \cos \theta$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{où} \quad \vec{p} = (2a)q \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

# 6 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.4 - Champ électrique d'un dipôle

### Exemple :

Molécule H<sub>2</sub>O  $\Rightarrow p = 6,1 \cdot 10^{-30}$  C.m

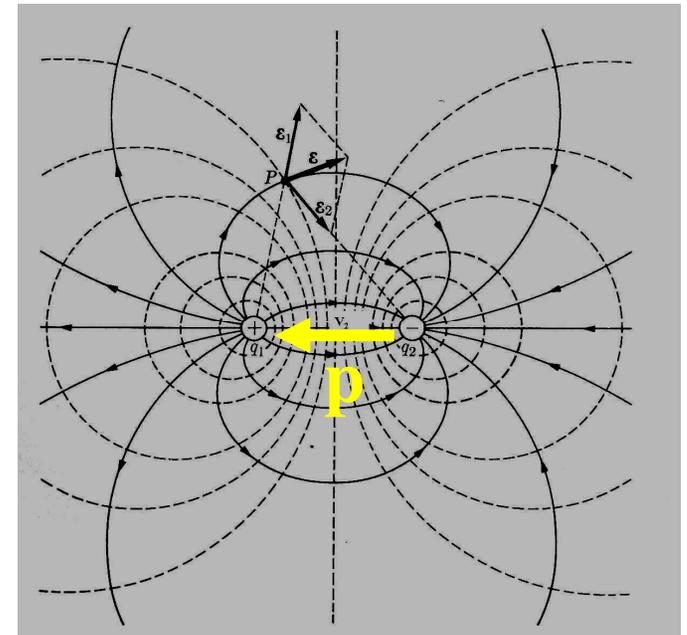
$$V(\vec{r}, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = -\vec{\nabla}V(r, \theta) = -\left[ \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right]$$



$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = E_r(r, \theta) \hat{e}_r + E_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta$$



# 9 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.5 - Lignes de champs

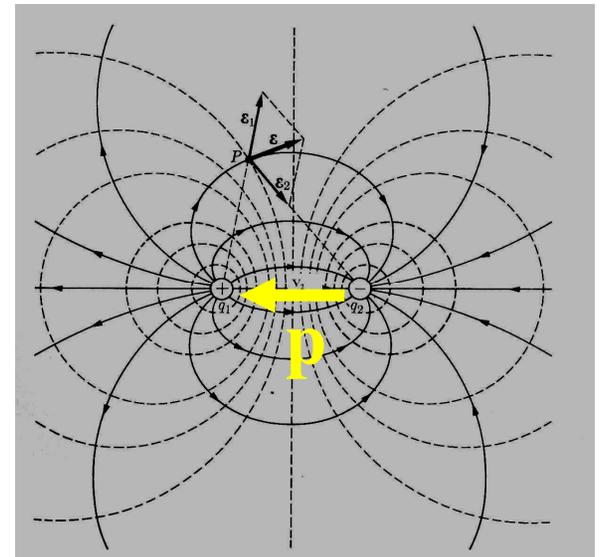
$$d\vec{L} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta \quad \vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \hat{e}_r + E_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta \quad \vec{E}(M) // d\vec{L}$$

$d\mathbf{L}$  : déplacement suivant la ligne de champ au point  $M(r, \theta)$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \longrightarrow \frac{dr}{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta} \longrightarrow \text{Log } r = \text{Log } \sin^2 \theta + \text{Cte}$$

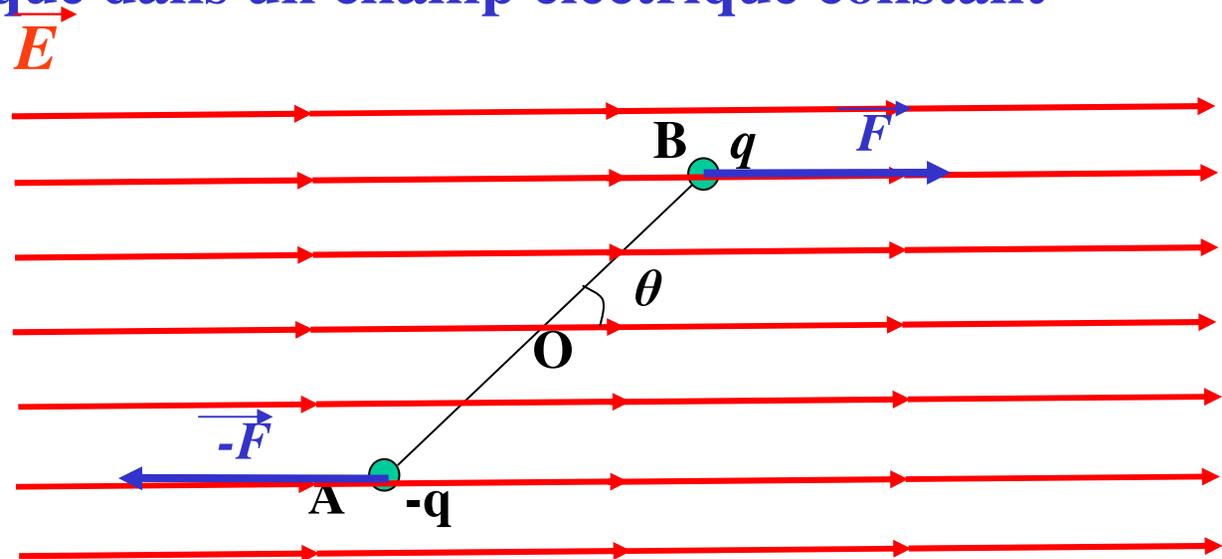
Equation de ligne de champs :  $r = C \cdot \sin^2 \theta$



# 9 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.6 – Dipôle électrique dans un champ électrique constant

Soit  $\theta$  l'angle initial entre le champ électrique et le moment dipolaire électrique



Le moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O}$  de la force  $\vec{F}$  par rapport à O est :

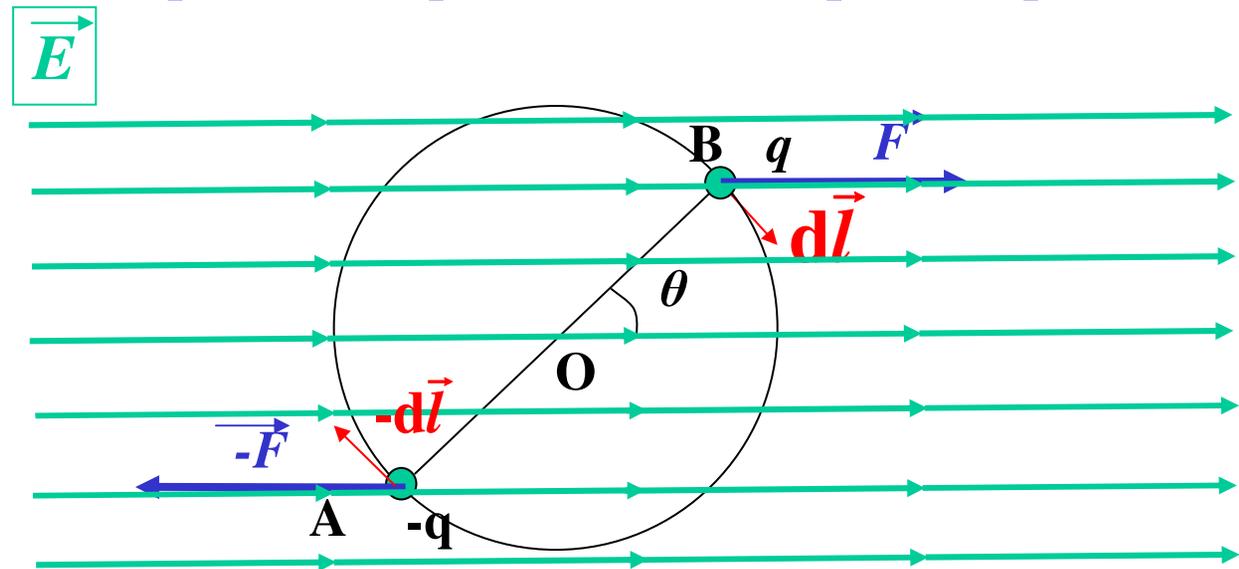
$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} &= \vec{OA} \times (-\vec{F}) + \vec{OB} \times \vec{F} = (-\vec{OA} + \vec{OB}) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} \\ &= \vec{AB} \times (q\vec{E}) = (q\vec{AB}) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned}$$

Le vecteur moment de force d'un dipôle électrique dans un champ potentiel constant est donné par le produit vectoriel du moment dipolaire électrique de ce dipôle et du vecteur champ électrique.

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{p} \times \vec{E}$$

## 6 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

### 9.7 – Energie potentielle d'un dipôle électrique dans un champ électrique



Le travail  $\mathcal{T}$  produit par  $\vec{E}$  est :

$$\mathcal{T} = \int_{\pi/2}^{\theta} \mathcal{M}_{\vec{F}/O} d\theta = - \int_{\pi/2}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE \cos \theta$$

L'énergie potentielle  $U_p$  est l'opposée du travail du moment de couple  $\mathcal{M}_{\vec{F}/O}$

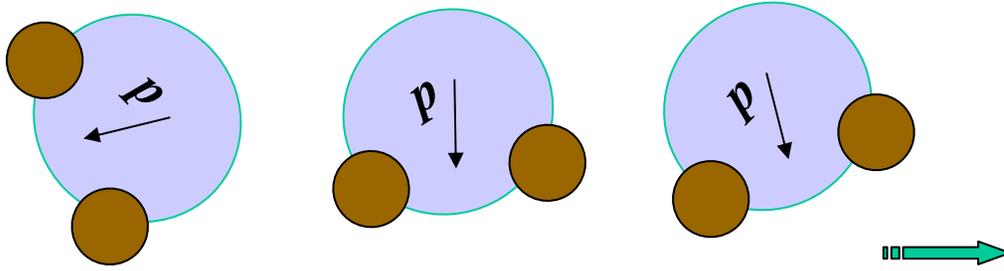
$$U_p = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

L'énergie potentielle du dipôle est minimale pour  $\theta = 0$  et maximale pour  $\theta = \pi$ .

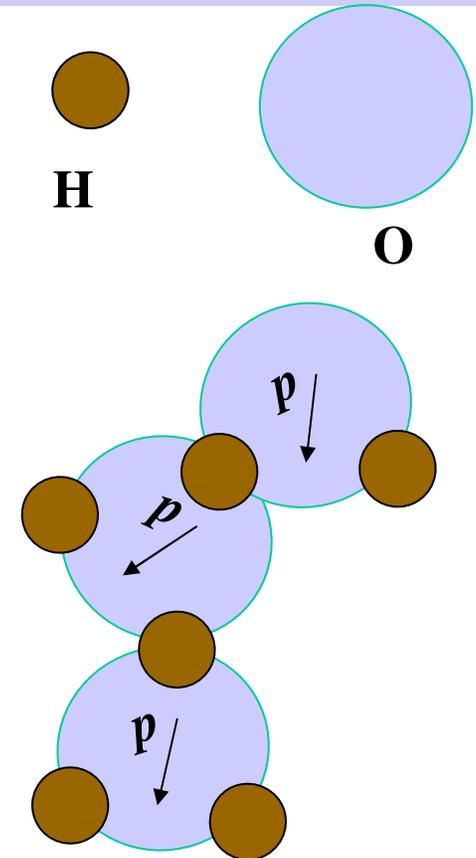
# 6 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.8 – Exemple : Four micro-onde

Les molécules d'eau sont libres de bouger.



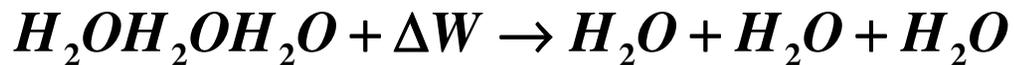
Le champ électrique produit par chaque dipôle influence les autres dipôles



Réaction exothermique

augmente la température de l'eau

Les collisions cassent des groupes et le transfert d'énergie est inversé (en moyenne le transfert est nul)



Réaction endothermique

diminue la température de l'eau

# 9 – APPLICATION : DIPOLE ELECTRIQUE

## 9.8 – Exemple : Four micro-onde (suite)

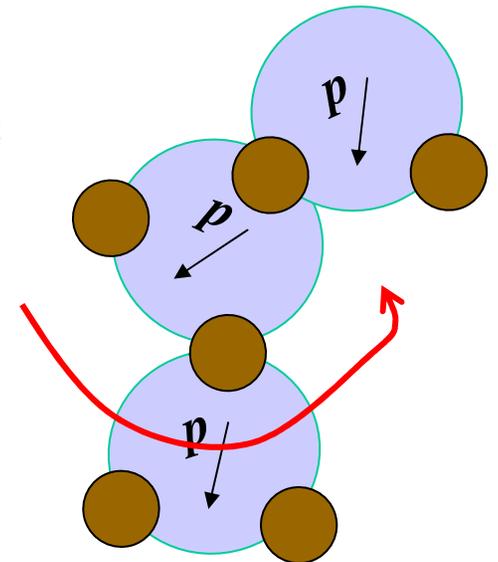
Dans un four micro-onde, les micro-ondes produisent un champ électrique oscillant. Ce champ essaie d'aligner les moments dipolaires des molécules d'eau.

Les molécules qui forment des groupes de 2 tournent autour de leur axe et restent alignées avec le champ.

Les groupes de 3 ou plusieurs molécules d'eau cassent au moins une liaison chimique.

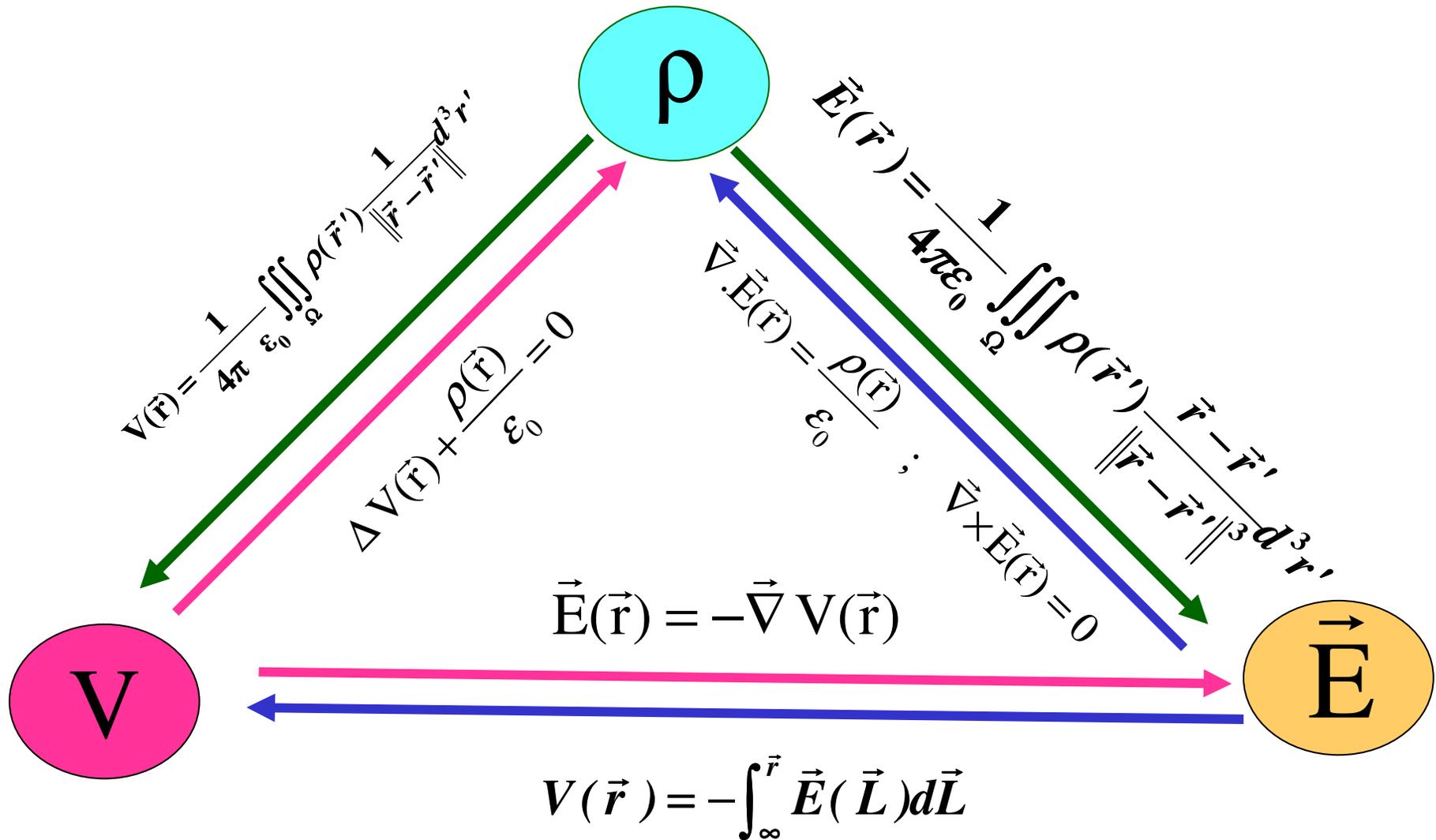
**L'énergie qui permet de casser la liaison vient du champ électrique des micro-ondes.**

Les groupes cassés forment d'autres groupes de 3 ou plusieurs molécules et transfèrent leur énergie potentielle au reste du Système  une augmentation de l'énergie thermique.



***La température de l'eau augmente et fait cuire votre repas favori!***

# Résumé : Triangle ( $\rho$ , $V$ , $\vec{E}$ )



# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

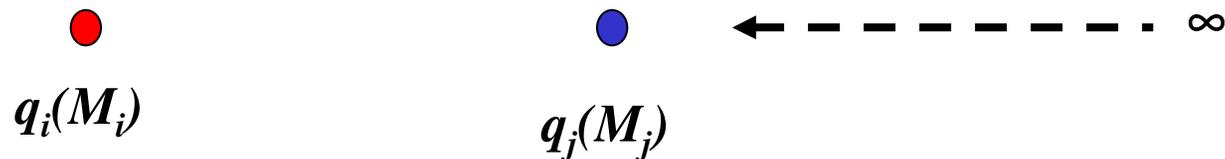
## 9.1 – Définition

L'énergie électrostatique d'un système est définie comme l'énergie d'interaction entre ses constituants. Elle est égale au travail fourni pour le constituer.

Elle est **négative** si les forces sont attractives, **positive** si les forces sont répulsives.

## 6.2 – Cas d'un système à deux particules

Soit  $q_i$  une charge placée au point  $M_i$  et  $q_j$  une charge déplacée de l'infini jusqu'au point  $M_j$ .



Le travail de la force de Coulomb associé au déplacement de la charge  $q_j$  est :

$$\int_{\infty}^{M_j} \vec{F} \cdot d\vec{L} = q_j \int_{\infty}^{M_j} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

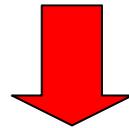
## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

Le travail fourni par l'extérieur est opposé au travail de la force coulombienne :

$$W = -q_j \int_{\infty}^{M_j} \vec{E} \cdot d\vec{L} = q_j (V_i(M_j) - V_{\infty}) = q_j V_i(M_j) = q_i V_j(M_i)$$

Par symétrie, on peut écrire :

$$W = q_j V_{ij} = q_i V_{ji} = \frac{1}{2} (q_j V_{ij} + q_i V_{ji})$$



L'énergie électrostatique du système  $\{q_i, q_j\}$  :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i V_i$$

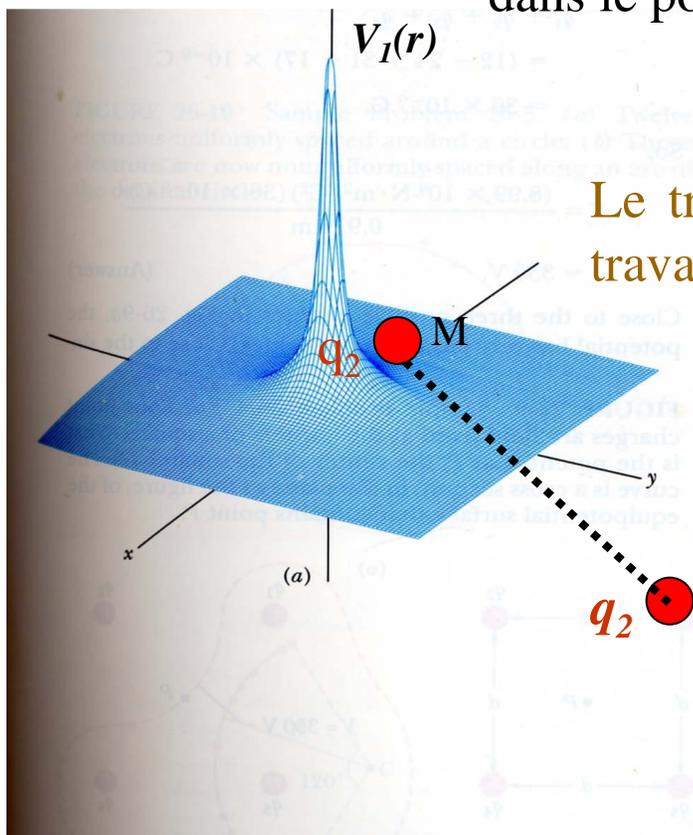
Unité S.I : **Joule** [J]

autre unité

eV =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

Soit une charge  $q_2 < 0$  qu'on veut déplacer de l'infini au point  $M$  dans le potentiel  $V_1(\mathbf{r})$  de la charge  $q_1 > 0$ .



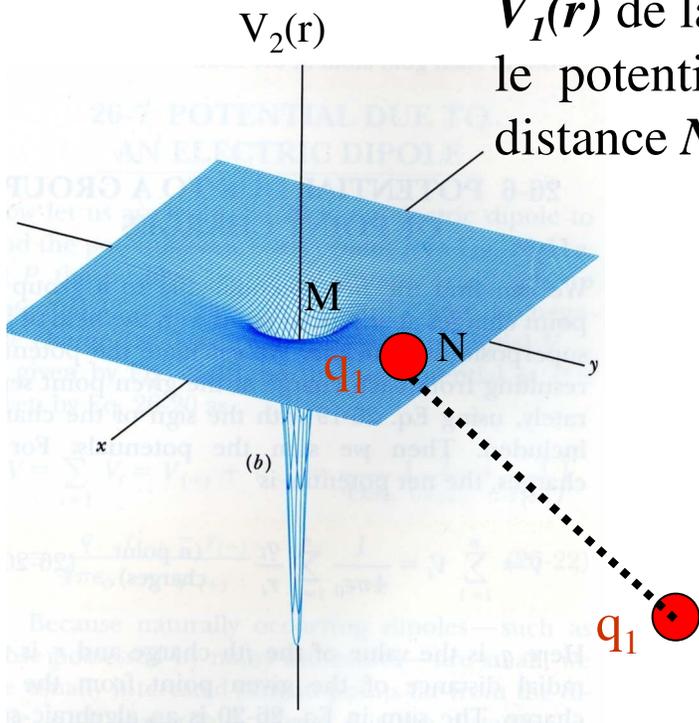
Le travail fourni  $W$  par l'agent extérieur est opposé au travail de la force coulombienne :

$$W = -q_2 \int_{\infty}^M \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = q_2 (V_1(M) - V_{\infty}) = q_2 V_1(M)$$

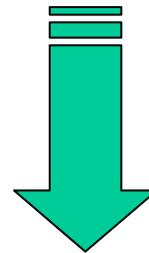
Le **travail** de l'infini au point  $M$  ne dépend pas du chemin suivi car le champ électrique  $\vec{E}_1$  dérive d'un **potentiel scalaire**  $V_1$ .

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

Le déplacement de  $q_2 < 0$  de l'infini au point M dans le potentiel  $V_1(\mathbf{r})$  de la charge  $q_1 > 0$  et équivalent au déplacement de  $q_1$  dans le potentiel  $V_2(\mathbf{r})$  de la charge  $q_2$  de l'infini au point N. La distance  $NM$  est la même dans les deux cas.



$$W = -q_1 \int_{\infty}^N \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = q_1(V_2(N) - V_{\infty}) = q_1 V_2(N)$$



$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1)$$

# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 9.2 – Distribution discrète

Soit un système  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  placées dans l'espaces en  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$

Supposons que ce système est constitué en déplaçant successivement ces charges de l'infini jusqu'à leur position finale

Pour déplacer  $q_2$  de l'infini jusqu'en  $M_2$ , le travail est  $W_2 = q_2 V_2$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} \quad \text{potentiel créé en } M_2 \text{ par } q_1$$

Pour déplacer  $q_3$  de l'infini jusqu'en  $M_3$ , le travail est  $W_3 = q_3 V_3$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \quad \text{potentiel créé en } M_3 \text{ par } q_1 \text{ et } q_2$$

Le travail total est :  $W = W_2 + W_3 = q_2 V_2 + q_3 V_3$

# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## Généralisation

Pour déplacer  $q_n$  de l'infini jusqu'en  $M_n$ , le travail est  $W_n = q_n V_n$

$$V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{r_{in}} \quad \text{potentiel créé en } M_n \text{ par } q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$$

Le travail total pour rassembler la distribution des  $n$  charges  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j>i}^n V_{ij} \quad \text{avec} \quad V_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

Par symétrie :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j \neq i}^n V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i) \quad V(M_i) = \sum_{j \neq i}^n V_j(M_i)$$

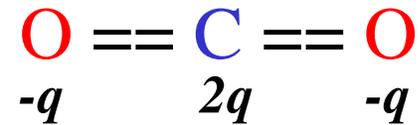
$V(M_i)$  Potentiel créé par toutes les autres charges au point où se trouve  $q_i$ .

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

### Exemple : Molécule de dioxyde de carbone CO<sub>2</sub>

$$\text{Système} = \{2q_o, q_c\}$$

$$\text{Distance (O, C)} = d = 116 \text{ pm}$$



$$W = \frac{1}{2} [2q_o V(O) + q_c V(C)]$$

Si on admet que la liaison C == O est ionique à 25 %  $\Rightarrow q = \frac{e}{4}$

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2q}{d} + \frac{-q}{2d} \right) \text{ potentiel créé en O}$$

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-q}{d} + \frac{-q}{d} \right) \text{ potentiel créé en C}$$

$$\rightarrow W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{7e^2}{32d}$$

$$W = -4,3 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -2,7 \text{ eV}$$

# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 9.3 – Distribution continue

La sommation est remplacée par une intégration sur le domaine dans lequel est répartie la distribution de charge.

✓ Distribution linéique  $\longrightarrow$   $W = \frac{1}{2} \int_L \lambda(\vec{r}) V(\vec{r}) d\vec{r}$

✓ Distribution surfacique  $\longrightarrow$   $W = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) d^2r$

✓ Distribution volumique  $\longrightarrow$   $W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$

Dans la pratique, nous avons souvent le cas d'un système de conducteurs en équilibre  $\Rightarrow$  répartition de la charge en surface  $dq = \sigma d^2r = \sigma dS$

# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 9.4 – Localisation de l'énergie dans l'espace

La définition de l'énergie électrostatique fait appel au champ électrique qui est responsable de la force de coulomb.

✓ L'énergie électrostatique est localisée dans le domaine de l'espace où le champs existe.



introduction de la notion de densité d'énergie

Pour une distribution localisée dans le volume  $\Omega$


$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$$

$\rho = 0$  en dehors de la distribution  $\Rightarrow$  l'intégration peut porter sur tout l'espace

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$$

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

✓ Loi de Gauss locale  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$   $\longrightarrow$   $W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V(\vec{r}) d^3r$

En utilisant la propriété générale du gradient :  $\vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) = V(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} V)$



$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (V(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}))}_{\oint_{S \rightarrow \infty} V(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})d\vec{S}=0} d^3r - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) d^3r$$

(car la surface  $S \rightarrow \infty$  en  $r^2$  et le produit  $V(r)E(r) \rightarrow 0$  en  $r^3$ )

D'autre par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \longrightarrow W = \iiint_{\text{espace}} dW = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d^3r$$

D'où la définition de la densité d'énergie

$$\frac{dW}{d^3r} = \frac{\epsilon_0}{2} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2$$

# 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 9.5 - Commentaire sur l'énergie électrostatique

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d^3r \quad \text{est toujours positive}$$

alors que 
$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{peut être positive ou négative}$$

Laquelle de ces deux équations est correcte ?

**Réponse :** Elles sont toutes les deux correctes.

La deuxième équation ne tient pas en compte le travail nécessaire pour ramener une charge. Elle suppose déjà l'existence d'une charge et elle permet de déterminer le travail nécessaire pour ramener les autres charges.

La première équation montre que le travail pour ramener une charge est infini:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 d^3r = \infty$$

# 7 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 7.5 - Commentaire sur l'énergie électrostatique (suite)

Le passage du discret au continu n'est pas tout à fait correct!

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$$

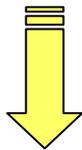
Dans la première équation (distribution discrète de charges), le potentiel  $V(\vec{r}_i)$  est créé par toutes les charges, **sauf la charge  $q_i$** , alors que pour la distribution continue le potentiel  $V(\vec{r})$  est **le potentiel total** de toute la charge continue.

Pour une distribution continue, ce n'est pas un problème car la charge en un point quelconque est infiniment petite. **Ceci n'est pas vrai pour une charge ponctuelle.**

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

9. 6 - L'énergie est-elle emmagasinée dans le champ électrique ou dans la charge ?

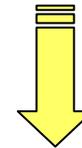
$$\frac{dW}{d^3r} = \frac{\epsilon_0}{2} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2$$



Pour la théorie de la radiation et la théorie de la relativité générale, la densité d'énergie est portée par le champ électrique

ou

$$\frac{dW}{d^3r} = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) V(\vec{r})$$



Pour la théorie de l'électrostatique, la densité d'énergie est portée par la charge électrique

## 9 – ENERGIE ELECTROSTATIQUE

### 9.7 - L'énergie électrostatique n'obéit pas au principe de superposition

$$\text{Si } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} (\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}))^2 d^3r$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}_1(\vec{r})\|^2 d^3r + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{E}_2(\vec{r})\|^2 d^3r + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{espace}} (2\vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{E}_2(\vec{r})) d^3r$$

**Par exemple: Doubler la charge électrique partout → quadrupler l'énergie électrostatique**