

Session d'examen de septembre 2006

Electromagnétisme 1

Durée 2 heures

Tout document est interdit

Exercice A

1. On considère deux charges ponctuelles, q et $-q$, placées dans le vide (permittivité ϵ_0) et distantes de a .

1. a. Exprimer en fonction des données, l'énergie potentielle électrostatique W de ce système de charges.

1. b. Donner une explication physique du signe de W .

1. c. La généralisation à un système de n charges ponctuelles est $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$ où $i=1, \dots, n$. Que représente le terme V_i ?

2. On considère une distribution volumique continue de charges, de densité volumique ρ constante, dans un volume sphérique Ω de centre O et de rayon R .

2. a. Déterminer, en fonction des données et en tout point M de l'espace, le champ électrostatique \mathbf{E} dû à cette distribution de charges; on notera r la distance OM .

Représenter graphiquement la norme E du champ \mathbf{E} en fonction de r .

2. b. Déterminer le potentiel électrostatique V pour $r \leq R$.

2. c. Calculer en fonction des données, l'énergie potentielle électrostatique W_1 de cette distribution en appliquant l'expression générale $W_1 = \frac{1}{2} \iiint_{\text{tout espace}} \epsilon_0 E^2 d\tau$, $d\tau$ étant égal à $4\pi r^2 dr$ dans le cas présent.

En quelles unités s'exprime $\epsilon_0 E^2$? Dans quelle région de l'espace est localisée W_1 ? Cette énergie W_1 est positive; or l'énergie W obtenue à la question 1. a. est négative. D'où provient cette contradiction (apparente)?

2. d. Calculer en fonction des données, l'énergie potentielle électrostatique W_2 de cette distribution en appliquant l'expression générale $W_2 = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho V d\tau$.

Dans quelle région de l'espace cette énergie est-elle localisée?

En quoi le potentiel V diffère-t-il du potentiel V_i de la question 1.c?

2. e. Laquelle des deux expressions, W_1 ou W_2 , est la plus correcte? Justifier votre réponse.

Exercice B

Un solénoïde infini, comptant N spires circulaires par unité de longueur, est parcouru par un courant d'intensité I .

1. Calculer l'énergie magnétique W contenue dans une tranche d'épaisseur h suivant l'axe de la bobine; on notera a le rayon des spires.

2. Application numérique: $h=10\text{cm}$, $a=5\text{cm}$ et B (norme du champ magnétique uniforme régnant dans la bobine) $=5\text{T}$.

Pour concentrer dans le même volume, la même énergie sous forme électrostatique, quelle devrait être la valeur de la norme E du champ électrostatique uniforme dans le solénoïde?

Exercice C

Une spire circulaire homogène conductrice de masse M , de résistance R , de self négligeable, de rayon a , est suspendue à un fil isolant vertical OO_1 qui n'oppose aucune résistance à la torsion. Un champ magnétique \mathbf{B} , horizontal, uniforme, règne dans toute la région où peut se mouvoir la spire. On désigne par α l'angle que fait la normale à la spire avec \mathbf{B} . A l'instant $t=0$, la spire est lancée à partir de la position $\alpha=0$, à la vitesse angulaire ω_0 autour de OO_1 . On notera i le courant induit dans la spire.

1. Montrer que $i = \pi a^2 (B/R) \omega \sin\alpha$, B étant la norme de \mathbf{B} .

2. En mécanique, on établit que l'équation différentielle du mouvement est $\frac{1}{2} Ma^2 \dot{\omega} = -\pi a^2 i B \sin\alpha$. Montrer que ω et α sont liés par :

$$\omega = \omega_0 - (\pi^2 a^2 B^2 / 2 M R) (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

(Indication: $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$)

En déduire la valeur qu'il faut donner à B pour que la spire s'arrête pour une valeur finale de $\alpha = \pi / 2$ lorsque $M=2\text{g}$, $\omega_0=2\pi \text{ rd /s}$, $R=4 \times 10^{-2} \Omega$ et $a=5\text{cm}$.

3. Montrer que l'énergie totale dissipée par effet Joule dans la spire est égale à son énergie cinétique initiale $(Ma^2/4)\omega_0^2$.